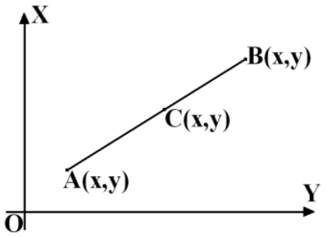
Математикадан
жоғарғы оқу орындарына
түсушілерге және
жоғарғы сынып оқушыларына
арналған

АНЫҚТАМА

СПРАВОЧНИК

по математике для поступающих
в ВУЗЫ и учащихся
старших классов

Декартовы координаты.
На плоскости (Жазықтықта)



Деление пополам.

$$C_X = \frac{A_X + B_X}{2}, C_Y = \frac{A_Y + B_Y}{2}$$

Если A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)
то расстояние

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Уравнение окружности:(R-радиус)

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ центр A(a,b)

Уравнение параболы:(a≠0)

$$ax^2 + bx + c = y$$

Уравнение гиперболы:(a≠0,b≠0)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Уравнение эллипса:(a≠0,b≠0)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Уравнение прямой:

$$ax + b = y$$

Уравнение прямой пересекающей точки A(x_1,y_2) и B(x_2,y_2)

A(x_1,y_2) және B(x_2,y_2) нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуі

$$\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2};$$

Законы умножения (Көбейту заңдары)

1.a·b=b·a; **2.**(a·b) ·c=a·(b·c); **3.**(a±b) ·c=a·c±b·c;

Основные свойства дроби (Бөлшектің негізгі қасиеттері)

1. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d};$

2. $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c};$

Сложение (Қосу)

1. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d};$
2. $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - c \cdot b}{b \cdot d};$

Умножение (Көбейту)

1. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d};$ **2.** $a \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{d};$

Деление (Бөлу)

1. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c};$ **2.** $\frac{a}{b} \div m = \frac{a}{b \cdot m};$ **3.** $m \div \frac{a}{b} = \frac{m \cdot b}{a};$

Отношение, пропорция (Қатынас, пропорция)

$$X \div Y = \frac{X}{Y}; \quad \frac{a}{b} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow a \cdot y = b \cdot x;$$

Степень (Дәреже)

$a^k = a \cdot a \cdot a \cdots a;$ k раз (рет)

Свойства (Қасиеті)

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m};$ **2.** $a^n \div a^m = a^{n-m};$

3. $(a^n)^m = a^{n \cdot m};$ **4.** $(abc)^m = a^m \cdot b^m \cdot c^m; m \in N;$

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}; b \neq 0, m \in N;$ **6.** $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m};$

7. $a^{-n} = \frac{1}{a^n};$ **8.** $a^0 = 1;$

Формулы сокращенного умножения
(Қысқаша көбейту формулалары)

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$

2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$

3. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b);$

4. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$

5. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$

6. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2);$

7. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2);$

Преобразование арифметических корней
(Арифметикалық түбірлерді түрлендіру)

1. $\sqrt[k]{a\cdot b} = \sqrt[k]{a}\cdot\sqrt[k]{b}, a \ge 0, b \ge 0;$

2. $\sqrt[k]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[k]{a}}{\sqrt[k]{b}}, a \ge 0, b \ge 0;$

3. $(\sqrt[k]{a})^m = \sqrt[k]{a^m}, a \ge 0, k \ge 0, m \ge 0;$

4. $\sqrt[k]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[km]{a}, a \ge 0, k, m \in N, k > 1, m > 1;$

5. $(\sqrt[n]{a})^n = \begin{cases} a, n - \textit{нечётная} \\ |a|, n - \textit{чётная} \end{cases};$

6. $\sqrt[k]{a^m} = \sqrt[kn]{a^{mn}}\cdot, \sqrt[k]{a} > \sqrt[k]{b}; a > b;$

7. $\sqrt[k]{a^k b} = a\sqrt[k]{b}, a \ge 0, b \ge 0;$

8. $b\sqrt[n]{a} = \begin{cases} \sqrt[n]{ab^n}, b \ge 0 \\ -\sqrt[n]{a|b|^n}, b \le 0 \end{cases};$

9. $\dfrac{m}{\sqrt[k]{a}} = \dfrac{m\cdot\sqrt[k]{a^{k-1}}}{\sqrt[k]{a}\cdot\sqrt[k]{a^{k-1}}} = \dfrac{m\cdot\sqrt[k]{a^{k-1}}}{\sqrt[k]{a^k}} = \dfrac{m\cdot\sqrt[k]{a^{k-1}}}{a}, a > 0;$

Действия над векторами на аналитической плоскости
Аналитикалық жазықтықтағы векторларға амалдар

$\vec{A} = (a;b)$ и (және) $\vec{B} = (c;d)$ тогда (онда)

1) $\vec{A} + \vec{B} = (a+c; b+d)$ $\quad \vec{A} - \vec{B} = (a-c; b-d)$

2) $k \in R$, тогда (онда) $\overrightarrow{kA} = k\cdot(a;b) = (ka, kb);$

3) $\vec{A} // \vec{B} \Rightarrow \dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d};$

Скалярное умножение
Скаляр көбейтінді

$\vec{A} = (a;b)$ и (және) $\vec{B} = (c;d)$ тогда (онда)

$\vec{A} + \vec{B} = a\cdot c + b\cdot d;$

1) $\vec{A}\cdot\vec{A} = (\vec{A})^2 = a^2 + b^2;$

2) $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A};$

3) $\vec{A}\cdot(\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C};$

4) $\vec{A}\cdot(\vec{B}\cdot\vec{C}) \ne (\vec{A}\cdot\vec{B})\cdot\vec{C};$

5) $(m\cdot\vec{A})\cdot(n\cdot\vec{B}) = (m\cdot n)\cdot(\vec{A}\cdot\vec{B}), m, n \in R;$

6) $(m\cdot\vec{A})\cdot\vec{B} = m\cdot(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\cdot(m\cdot\vec{B}), m \in R;$

7) $\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cdot\cos\alpha \quad \cos\alpha = \dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|} = \dfrac{a\cdot c + b\cdot d}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}};$

8)Если (егер) $\vec{A} \perp \vec{B}$,тогда (онда) $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$

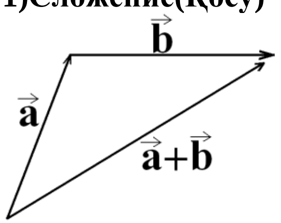
9)Если (егер) $\vec{A} // \vec{B}$,тогда (онда) $\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}|\cdot|\vec{B}|$

10) $|\vec{A} + \vec{B}|^2 = (\vec{A} + \vec{B})^2 = \vec{A}^2 + 2\cdot\vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{B}^2 = |\vec{A}|^2 + 2\cdot\vec{A}\cdot\vec{B} + |\vec{B}|^2$

11) $|\vec{A} + \vec{B}|^2 + |\vec{A} - \vec{B}|^2 = 2\cdot\left(|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2\right);$

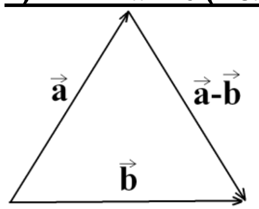
Векторы
Векторлар

1)Сложение(Қосу)

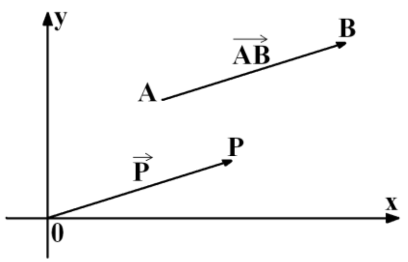


$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC};$$
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD};$$
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=0;$$
$$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$$

2)Вычитание (Азайту)



Действия на плоскости
Жазықтықтағы амалдар



Если A(x_1;y_1) и B(x_2;y_2), то
$\vec{P}=\overrightarrow{AB}=B-A=(x_2-x_1;y_2-y_1)$

Модуль вектора
Вектор модулі

Если (егер) $\vec{u}=(a;b)$, тогда (онда) $|\vec{u}|=\sqrt{a^2+b^2}$ -модуль вектора.

Если (егер) $\vec{u}=(a;b)$ и (және) $|\vec{u}|=\sqrt{a^2+b^2}=1\Rightarrow\vec{u}$ -единичный вектор (бірлік вектор).

10. $\dfrac{m}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\dfrac{m\cdot(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}=\dfrac{m\cdot(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}{a-b};$

11. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b;$

12. $(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=a\pm b;$

13. $a\sqrt{a}\pm b\sqrt{b}=(\sqrt{a})^3\pm(\sqrt{b})^3=(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})(a\mp\sqrt{ab}+\sqrt{b});$

Модуль числа и свойства
(Санның модулі және оның қасиеттері)

$$|a|=\begin{cases}a & \text{если } a\ge 0\\ -a & a<0\end{cases}$$

1. $|a|\ge 0;$

2. $|a|=|-a|;$

3. $|a|=|b|\Rightarrow a=\pm b;$

4. $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|;$

5. $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|};$

6. $|a\pm b|\le|a|+|b|;$

7. $|a|<b\Leftrightarrow -b<a<b, 0<b;$

8. $|a|>c\Leftrightarrow\begin{cases}x>c\\ x<-c\end{cases};$

Уравнения (Теңдеулер)

1. $f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)+A(x)=g(x)+A(x);$

2. $f(x)=g(x)+A(x)-A(x);$

3. $f(x)A(x)=g(x)A(x)$ или $\dfrac{f(x)}{A(x)}=\dfrac{g(x)}{A(x)}(A(x)\ne 0);$

Линейные уравнения (Сызықтық теңдеулер)

$$ax=0, ax\pm b=0, a(x+c)=0, a\ne 0;$$

Квадратные уравнения, решение
(Квадрат теңдеулер, шешу)

$$ax^2+bx+c=0; a\ne 0 \quad \Delta=b^2-4ac;$$

если $\Delta>0\Rightarrow x_{1/2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ если $\Delta=0\Rightarrow x_{1/2}=\dfrac{-b}{2a}$

Решений нет, если $\Delta<0;$

Виды уравнений (Теңдеулер түрлері)

1. $ax^2+c=0; a\neq 0,$ $\quad x_{1/2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}};$

2. $ax^2+bx=0; a\neq 0,$ $\quad x_1=0, x_2=-\frac{b}{a};$

3. $ax^2=0; a\neq 0,$ $\quad x_1=x_2=0;$

4. $ax^2+bx+c=0, a\neq 0,$ $\quad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$

5. $x^2+bx+c=0,$ $\quad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2},$

6. $ax^2+2kx+c=0; a\neq 0,$ $\quad x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a};$

7. $x^2+bx+c=0,$ $\quad x_{1,2}=-k\pm\sqrt{k^2-c};$

8. $ax^2+bx+c=0; a\neq 0,$ если (егер), $a+b+c=0$ то $x_1=1, x_2=-\frac{c}{a};$

9. $ax^2+bx+c=0; a\neq 0,$ если (егер), $a+(-b)+c=0$ то $x_1=-1, x_2=-\frac{c}{a};$

Теорема ВИЕТА

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

то $x_1+x_2=-\frac{b}{a}; x_1\cdot x_2=\frac{c}{a};$

Разложение квадратного трёхчлена на множители (Квадрат үшмүшені көбейткіштерге жіктеу)

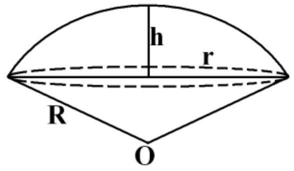
$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

$$x^2+bx+c=(x-x_1)(x-x_2)$$

Неравенства (Теңсіздіктер)

1. $ax<b \Rightarrow \begin{cases} x>\frac{b}{a}, & a<0 \\ x<\frac{b}{a}, & a<0 \end{cases}$ если (егер)

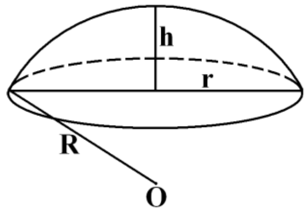
Шаровой сектор.(Шар секторы)



$S=\pi\cdot R\cdot(2h+r);$

$V=\frac{2\cdot\pi\cdot R^2\cdot h}{3};$

Шаровой сегмент.(Шар сегменті)



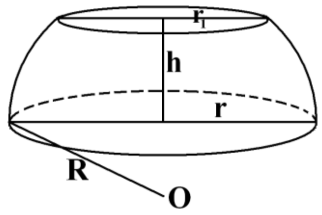
$r^2=h\cdot(2R-h);$

$S_{БОК}=\pi\cdot(r^2-h^2);$

$S_{ПОЛ}=\pi(2Rh+r^2)=\pi(h^2+2r^2);$

$V=\frac{1}{6}\pi\cdot h\cdot(3r^2+h^2)=\frac{1}{3}\pi\cdot h^2\cdot(3R-h);$

Шаровой слой.(Шар қабаты)



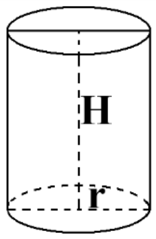
$R^2=r^2+\left(\frac{r^2-r_1^2-h^2}{2h}\right)$

$S_{БОК}=2\cdot\pi\cdot R\cdot h;$

$S=\pi\cdot\left(2\cdot R\cdot h+r^2+r_1^2\right)$

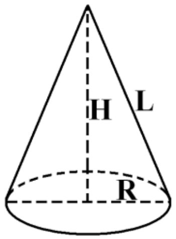
$V=\frac{1}{6}\cdot\pi\cdot h\cdot\left(3\cdot r^2+3\cdot r_1^2+h^2\right)$

Цилиндр



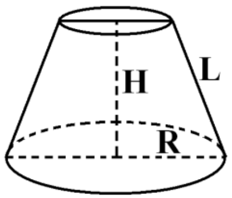
$$S_{БОК} = 2\pi \cdot R \cdot H;$$
$$S_{ОСН} = \pi \cdot R^2;$$
$$S_{ПОЛ} = S_{БОК} + 2 \cdot S_{ОСН} = 2\pi \cdot R \cdot (H+R);$$
$$V = S_{ОСН} \cdot H = \pi \cdot R^2 \cdot H;$$

Конус



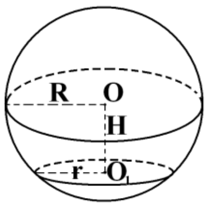
$$S_{БОК} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot L = \pi \cdot R \cdot L;$$
$$S_{ПОЛ} = S_{БОК} + 2 \cdot S_{ОСН} = \pi \cdot R \cdot (R+L);$$
$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ОСН} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot HR^2 \cdot H$$

Усечённый конус
(Қиық конус)



$$S_{БОК} = \pi \cdot (R+r) \cdot L;$$
$$S_{ПОЛ} = S_{БОК} + S_1 + S_2 = \pi \cdot (R^2 + r^2 + L(R+r));$$
$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ОСН} \cdot H(R^2 + R \cdot r + r^2);$$

Шар.Сфера.



$S = \pi \cdot R^2$ Площадь большого круга
$S = \pi \cdot r^2$ Площадь маленького круга
$H = \sqrt{R^2 - r^2}$ Расстояние между кругами
$S = 4 \cdot \pi \cdot R^2$
$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$$

2. $ax < b \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{b}{a}, & \\ x > \frac{b}{a}, & \end{cases}$ если (егер) $\begin{matrix} a < 0 \\ a < 0 \end{matrix}$

Квадратные неравенства
(Квадрат теңсіздіктер)

$ax^2 + bx + c < 0$ или $ax^2 + bx + c > 0;$

1. $ax^2 + bx + c > 0;$ если $a > 0; x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$

если $a > 0; \Delta = 0; x \in (-\infty; x_1) \cup (x_1; \infty)$

если $a > 0; \Delta < 0, x \in (-\infty; \infty);$

$a < 0; \Delta < 0;$ то решений нет.

2. $ax^2 + bx + c < 0$ i) Если $a > 0; \Delta > 0,$ то $x \in (x_1; x_2);$

ii) Если $\Delta < 0,$ то решений нет.

iii) Если $a < 0; \Delta < 0;$ то $x \in (-\infty; \infty);$

$|f(x)| > |g(x)|,$ то (онда) $(f(x))^2 > (g(x))^2$

$|f(x)| = \begin{cases} f(x), \\ -f(x), \end{cases}$ если (егер) $\begin{matrix} f(x) \geq 0; \\ f(x) < 0; \end{matrix}$

Иррациональные неравенства
(Иррационал теңсіздіктер)

1. $\sqrt{f(x)} < g(x)$ $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < (g(x))^2 \end{cases}$

2. $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$ $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq (g(x))^2 \end{cases}$

3. $\sqrt{f(x)} > g(x)$ a) если $g(x) \geq 0$ $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) > (g(x))^2 \end{cases}$

b) если $g(x) < 0$ $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \sqrt{f(x)} > g(x) \end{cases}$

4. $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ a) $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$

Показательные неравенства
(Көрсеткіштік теңсіздіктер)

1.Если: $a>1$ то $a^{f(x)}>a^{g(x)} \Rightarrow f(x)>g(x)$

$a^{f(x)}<a^{g(x)} \Rightarrow f(x)<g(x)$

2.Если: $0<a<1$ то $a^{f(x)}>a^{g(x)} \Rightarrow f(x)<g(x)$

$a^{f(x)}<a^{g(x)} \Rightarrow f(x)>g(x)$

3. $a^{f(x)}>c, a>0, a\neq 1;$ а) $c>0, 0<a<1, a\neq 1;$ то $f(x)<\log_a c$

б) $c>0, a>1, a\neq 1;$ то $f(x)>\log_a c$

4. $a^{f(x)}>c, a>0, a\neq 1;$ а) $c>0, 0<a<1;$ то $f(x)>\log_a c$

б) $c>0, a>1;$ то $f(x)<\log_a c$

в) $c\leq 0;$ то решения нет

5. $(f(x))^{g(x)}>1 \Leftrightarrow (f(x))^{g(x)}>(f(x))^0$ то

$\begin{cases} 0<f(x)<1 \\ g(x)<0 \end{cases}$ и $\begin{cases} f(x)>1 \\ g(x)>0 \end{cases}$

6. $(f(x))^{h(x)}<1 \Leftrightarrow (f(x))^{h(x)}<(f(x))^0$ то

$\begin{cases} 0<f(x)<1 \\ h(x)>0 \end{cases}$ и $\begin{cases} f(x)>1 \\ h(x)<0 \end{cases}$

Логарифмические неравенства
(Логарифмдік теңсіздіктер)

1. $\log_a f(x)>k$ $a>0, a\neq 1;$ а)Если (егер) $0<a<1,$ то $\begin{cases} f(x)<a^k \\ f(x)>0 \end{cases}$

б)Если (егер) $a>1,$ то $f(x)>a^k$

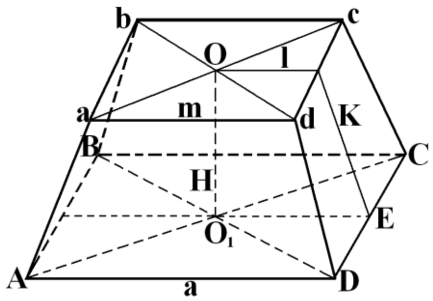
2. $\log_a f(x)<b; a>0, a\neq 1$

а)Если (егер) $0<a<1,$ то $f(x)>a^b$

б)Если (егер) $a>1,$ то $\begin{cases} f(x)<a^b \\ f(x)>0 \end{cases}$

3. $\log_a f(x)>\log_a g(x)$

Усечённая пирамида
(Қиық пирамида)



$$S_{БОК}=\frac{1}{2}\cdot(P+p)\cdot K;$$

$$V=\frac{1}{3}\cdot H\cdot\left(S_1+\sqrt{S_1\cdot S_2}+S_2\right);$$

$$S_{ПОЛ}=S_{БОК}+S_1+S_2;$$

Правильная усечённая пирамида
(Дұрыс қиық пирамида)

a,m-стороны основания;

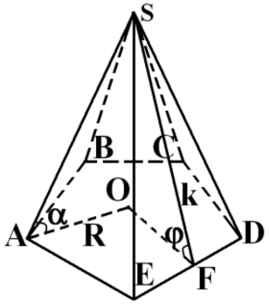
ABCD//abcd
OO_1=H-высота
P=AB+BC+CD+DA-нижний периметр
p=ab+bc+cd+da-верхний периметр
S_1-площадь ABCD
S_2-площадь abcd

$$P=an,\ p=am;$$

$$S_{БОК}=\frac{1}{2}\cdot(P+p)\cdot K=\frac{n}{2}(a+m)\cdot K; S_{ПОЛ}=S_{БОК}+S_1+S_2;$$

$$V=\frac{1}{3}\cdot H\cdot\left(a^2+a\cdot m+m^2\right);$$

Пирамида



SA,SB,SC,SD,SE,…-боковые ребра,
AB,BC,BD,DE,…-стороны основания,
SO=H-высота,
P=AB+BC+CD+DE+EA+…-
перим. осн.,
SF=k-Апофема,
α,β-углы при основании.

$$V=\frac{1}{3}\cdot S_{ОСН}\cdot H$$

$$S_{ПОЛ}=S_{БОК}+S_{ОСН}=\frac{P\cdot k}{2}+S_{ОСН}$$

Если (егер) AB=BC=CD=DE=EA=…=a
P=a·n (n-число сторон)

$$S_{БОК}=\frac{a\cdot n\cdot k}{2};S_{БОК}=R\cdot k\cdot\sin\frac{180^\circ}{n}$$

$$a_n=2\cdot r\cdot R\cdot\sin\frac{180^\circ}{n};$$

$$V=\frac{1}{3}\cdot S_{ОСН}\cdot H=\frac{H}{6}\cdot a\cdot n\cdot r\cdot n=\frac{H\cdot n}{6}\cdot a_n\cdot r_n=\frac{H\cdot n}{6}\cdot\sqrt{4R^2-a_n^{\ 2}}\cdot R\cdot\sin\frac{180^\circ}{n};$$

а)Если (егер) $0<a<1,$ то $\begin{cases} f(x)<g(x) \\ f(x)>0 \end{cases}$ б)Если (егер) $a>1,$ то $\begin{cases} f(x)>g(x) \\ g(x)>0 \end{cases}$

4. $\log_a f(x)<\log_a g(x)$

а)Если (егер) $0<a<1,$ то $\begin{cases} f(x)>g(x) \\ g(x)>0 \end{cases}$ б)Если (егер) $a>1,$ то $\begin{cases} f(x)<g(x) \\ f(x)>0 \end{cases}$

5. $\log_{f(x)} g(x)>0$ то $\begin{cases} 0<f(x)<1 \\ 0<g(x)<1 \end{cases}$ и $\begin{cases} f(x)>1 \\ g(x)>1 \end{cases}$

6. $\log_{f(x)} g(x)<0$ то $\begin{cases} 0<f(x)<1 \\ g(x)>1 \end{cases}$ и $\begin{cases} f(x)>1 \\ 0<g(x)<1 \end{cases}$

7. $\log_{f(x)} g(x)<n$ то $\begin{cases} 0<f(x)<1 \\ g(x)>(f(x))^n \end{cases}$ и $\begin{cases} f(x)>1 \\ 0<g(x)<(f(x))^n \end{cases}$

8. $\log_{f(x)} g(x)>\log_{f(x)} h(x)$ то $\begin{cases} 0<f(x)<1 \\ g(x)<h(x) \\ g(x)>0 \end{cases}$ и $\begin{cases} f(x)>1 \\ g(x)>h(x) \\ h(x)>0 \end{cases}$

9. $\log_{f(x)} g(x)<\log_{f(x)} h(x)$ то $\begin{cases} 0<f(x)<1 \\ g(x)>h(x) \\ h(x)>0 \end{cases}$ и $\begin{cases} f(x)>1 \\ g(x)<h(x) \\ g(x)>0 \end{cases}$

Тригонометрия
Основные формулы (Негізгі формулалар)

1. $\sin^2 x+\cos^2 x=1;$ **а)** $\sin^2 x=1-\cos^2 x;$ **б)** $\cos^2 x=1-\sin^2 x;$

2. $tgx=\frac{\sin x}{\cos x};$ **3.** $ctgx=\frac{\cos x}{\sin x};$ **4.** $ctgx\cdot tgx=1;$

5. $1+tg^2x=\frac{1}{\cos^2 x};$ **6.** $1+ctg^2x=\frac{1}{\sin^2 x};$

7. $\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\sin y\cdot\cos x;$

8. $\sin(x-y)=\sin x\cdot\cos y-\sin y\cdot\cos x;$

9. $\cos(x+y)=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y;$

10. $\cos(x-y)=\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y;$

11. $tg(x+y)=\dfrac{tgx+tgy}{1-tgx\cdot tgy}$;

12. $tg(x-y)=\dfrac{tgx-tgy}{1+tgx\cdot tgy}$;

13. $ctg(x+y)=\dfrac{ctgx\cdot ctgy-1}{ctgx+ctgy}$;

14. $ctg(x-y)=\dfrac{ctgx\cdot ctgy+1}{ctgy-ctgx}$;

15. $\sin 2x=2\cdot\sin x\cdot\cos y$;

16. $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$;

17. $\cos 2x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$;

18. $tg\,2x=\dfrac{2\cdot tgx}{1-tg^2x}$;

19. $ctg\,2x=\dfrac{ctg^2x-1}{2\cdot ctgx}$;

20. $\sin^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-\cos x}{2}$;

21. $\cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1+\cos x}{2}$;

22. $tg\,\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$;

23. $\sin x=\dfrac{2tg\,\frac{x}{2}}{1+tg^2\,\frac{x}{2}}$;

24. $\cos x=\dfrac{1-tg^2\,\frac{x}{2}}{1+tg^2\,\frac{x}{2}}$;

25. $tgx=\dfrac{2tg\,\frac{x}{2}}{1-tg^2\,\frac{x}{2}}$;

26. $\sin x+\sin y=2\cdot\sin\dfrac{x+y}{2}\cdot\cos\dfrac{x-y}{2}$;

27. $\sin x-\sin y=2\cdot\cos\dfrac{x+y}{2}\cdot\sin\dfrac{x-y}{2}$;

28. $\cos x+\cos y=2\cdot\cos\dfrac{x+y}{2}\cdot\cos\dfrac{x-y}{2}$;

29. $\cos x-\cos y=-2\cdot\sin\dfrac{x+y}{2}\cdot\sin\dfrac{x-y}{2}$;

30. $tgx+tgy=\dfrac{\sin(x+y)}{\cos x\cdot\cos y}$;

31. $tgx-tgy=\dfrac{\sin(x-y)}{\cos x\cdot\cos y}$;

32. $ctgx+ctgy=\dfrac{\sin(x+y)}{\sin x\cdot\sin y}$;

33. $ctgx-ctgy=\dfrac{\sin(y-x)}{\sin x\cdot\sin y}$;

2.Правильная призма (Дұрыс призма)

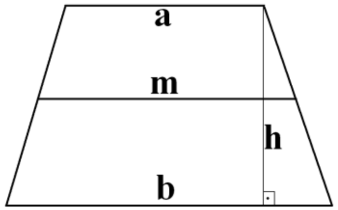
$P=a\cdot n$;

$S_{БОК}=a\cdot n\cdot H$;

$S_{ОСН}=a\cdot n\cdot r/2$; (r-радиус вписанного круга)

$S_{ПОЛ}=S_{БОК}+2\cdot S_{ОСН}=a\cdot n\cdot(H+r)$;

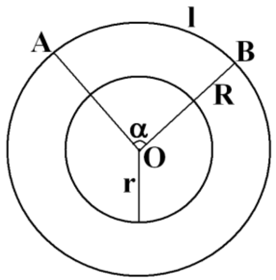
Трапеция



$m=\dfrac{a+b}{2}$,

$S=\dfrac{a+b}{2}\cdot h=m\cdot h$;

Окружность,круг,сектор,кольца.
(Шеңбер,дөңгелек,сектор,сақина)



$C=2\pi R$ (Длина окружности) (Шеңбер ұзындығы)

$S=\pi\cdot R^2$ (Площадь круга) (Шеңбер ауданы)

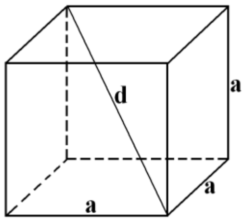
$l=\dfrac{\pi\cdot R}{180°}\cdot n=\alpha\cdot R$ (Длина дуги) (Доға ұзындығы)

$S=\pi(R^2-r^2)$ Площадь кольца(сақина ауданы)

$S=\dfrac{\pi\cdot R^2\cdot h}{360°}=\dfrac{1}{2}\cdot R^2\cdot\alpha$ Площадь сектора OAB (OABсекторының ауданы)

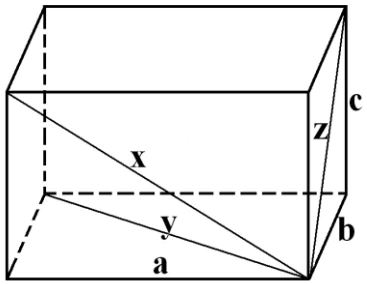
$S=\dfrac{\alpha}{2}\cdot(R^2-r^2)$ Площадь сегмента (сегмент ауданы)

Куб



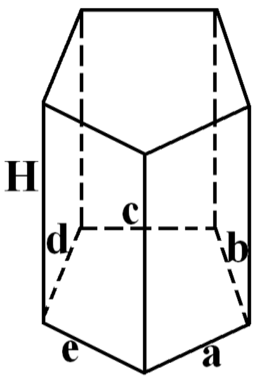
$a=b=c$; $d = a\sqrt{3}$;
$S_{ОСН}=a^2$; $S_{БОК}=4\cdot a^2$;
$V=a^3$; $S_{ПОЛ}=6\cdot a^2$;

Дано :x,y,z диагонали.Найти : a=? b=? c=?



$$\begin{cases} a^2+c^2=x^2 \\ a^2+b^2=y^2 \\ b^2+c^2=z^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2-z^2\right)} \\ b=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(y^2+z^2-x^2\right)} \\ c=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(x^2+z^2-y^2\right)} \end{cases}$$

Призма



Р-периметр основания(табан)
P=a+b+c+d+e;

1.Призма прямая (тік призма)
$S_{БОК}=P\cdot H$;
$S_{ОСН}=S_{ОСН.НИЖ.}=S_{ОСН.ВЕРХ.}$;
$S_{ПОЛ}=S_{БОК}+2\cdot S_{ОСН}$;
$V=S_{ОСН}\cdot H$;

34. $\sin x\cdot\sin y=\frac{1}{2}\cdot(\cos(x-y)-\cos(x+y))$;

35. $\cos x\cdot\cos y=\frac{1}{2}\cdot(\cos(x+y)+\cos(x-y))$;

36. $\sin x\cdot\cos y=\frac{1}{2}\cdot(\sin(x+y)+\sin(x-y))$;

37. $\sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$; **38.** $\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$;

39. $tg\,\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$; **40.** $ctg\,\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$;

41. $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-x)$; **42.** $\cos x-\sin x=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-x)$;

43. $1+\sin x=2\cos^2(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})$; **44.** $1-\sin x=2\sin^2(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})$;

45. $\sin 3x=3\sin x-4\sin^2 x$; **46.** $\cos 3x=4\cos^2 x-3\cos x$;

47. $tg\,3x=\frac{3tgx-tg^2x}{1-3tg^2x}$; **48.** $ctg\,3x=\frac{ctg^2x-3ctgx}{3ctg^2x-1}$;

49. $tgx+ctgx=\frac{2}{\sin 2x}$; **50.** $tgx-ctgx=-2ctg\,2x$;

51. $1-tg^2x=\frac{\cos 2x}{\cos^2 x}$; **52.** $1-ctg^2x=-\frac{\cos 2x}{\sin^2 x}$;

Формулы приведения
(Келтіру формуласы)

x	$\frac{\pi}{2}-x$	$\frac{\pi}{2}+x$	$\pi-x$	$\pi+x$	$\frac{3\pi}{2}-x$	$\frac{3\pi}{2}+x$	$2\pi-x$	$2\pi+x$
	90º-x	**90º+x**	**180º-x**	**180º+x**	**270º-x**	**270º+x**	**360º-x**	**360º+x**
sinx	**cosx**	**cosx**	**sinx**	**-sinx**	**-cosx**	**-cosx**	**-sinx**	**sinx**
cosx	**sinx**	**-sinx**	**-cosx**	**-cosx**	**-sinx**	**sinx**	**cosx**	**cosx**
tgx	**ctgx**	**-ctgx**	**-tgx**	**tgx**	**ctgx**	**-ctgx**	**-tgx**	**tgx**
ctgx	**tgx**	**-tgx**	**-ctgx**	**ctgx**	**tgx**	**-tgx**	**-ctgx**	**ctgx**

Значения тригонометрических функций
(Тригонометриялық функциялардың мәндері)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	2π
	0º	**30º**	**45º**	**60º**	**90º**	**120º**	**135º**	**150º**	**180º**
sinx	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cosx	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tgx	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
ctgx	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞

$\sin(-x) = -\sin x$

$\cos(-x) = \cos x$

$tg(-x) = -tgx$

$ctg(-x) = -ctgx$

$\arcsin(-x) = -\arcsin x$

$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

$arctg(-x) = -arctgx$

$arcctg(-x) = \pi - arcctgx$

Тригонометрические уравнения
(Тригоноетриялық теңдеулер)

$k \in Z$

$\sin x = a, \quad -1 \le a \le 1;$

$0 \le a \le 1, \quad x = (-1)^k \arcsin a + k\pi,$

$-1 \le a \le 0, \quad x = (-1)^{k+1} \arcsin a + k\pi,$

1. $\sin x = 0, \quad x = k\pi;$

2. $\sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi;$

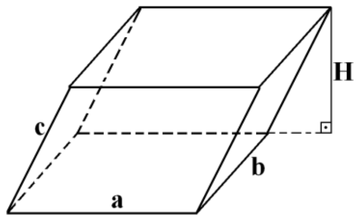
3. $\sin x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{2} + k\pi;$

4. $\sin^2 x = a, \; 0 \le a \le 1, \; x = \pm\arcsin\sqrt{a} + k\pi;$

4.Если (егер) n=k:

$$R = \frac{a_k}{2\sin\frac{180^\circ}{k}}, \; r_k = \frac{a_k}{2tg\frac{180^\circ}{k}}; \; S = \frac{\pi}{2}\cdot R^2 \cdot \sin\frac{2\pi}{k};$$

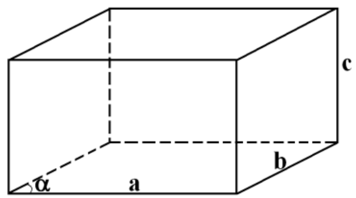
Стереометрия
Наклонный параллелепипед.
(Көлбеу параллелепипед)



$V=S_{ОСН}\cdot H;$

$S_{ПОЛ}=2S_{ОСН}+S_{БОК};$

Прямой параллелепипед
(Тік параллелепипед)

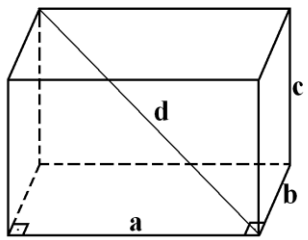


$H=c; \quad S_{ОСН}=a\cdot b\cdot \sin\alpha;$

$S_{ПОЛ}=2\cdot(a+b)\cdot c+a\cdot b\cdot \sin\alpha;$

$V=a\cdot b\cdot c\cdot \sin\alpha;$

Прямоугольный параллелепипед
(Тікбұрышты параллелепипед)



$H=c; \quad S_{ОСН}=a\cdot b;$

$S_{БОК}=2\cdot(a+b)\cdot c;$

$S_{ПОЛ}=2\cdot((a+b)\cdot c+a\cdot b);$

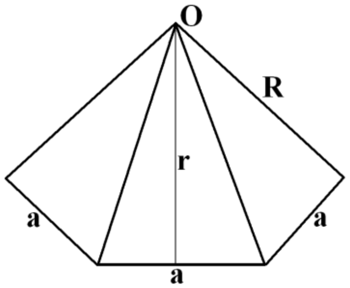
$V=a\cdot b\cdot c;$

Квадрат

Диагональ: $d = a\sqrt{2};$

Площадь(Ауданы) $S = a^2 = d^2/2;$

Правильные многоугольники
(Дұрыс көпбұрыштар)



$$1.\ \varphi_n = \frac{n-2}{n}\cdot 180^\circ; (\varphi'_n = 180^\circ - \varphi_n);$$

$$2.\ a_n = 2R\cdot \sin\frac{180}{n}; r_n = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{4R^2 - a_n^{\ 2}};$$

$\varphi_n -$ внутренний угол (ішкі бұрыш)

$\varphi'_n -$ внешний угол (сыртқы бұрыш)

1.Если (егер) n=3:

$\varphi_3 = 60^\circ, a_3 = R\sqrt{3}, r_3 = \frac{1}{2}R,$

$S_3 = \frac{a_3^{\ 2}\sqrt{3}}{4}, \varphi'_3 = 120^\circ;$

2.Если (егер) n=4:

$\varphi_4 = 90^\circ, a_4 = R\sqrt{2}, r_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}R,$

$S_4 = a_4^{\ 2}, \varphi' = 90^\circ;$

3.Если (егер) n=6:

$\varphi_6 = 120^\circ, a_6 = R, r_6 = \frac{\sqrt{3}}{2}R,$

$S_6 = \frac{3a_6^{\ 2}\sqrt{3}}{2}, \varphi'_6 = 60^\circ;$

$\underline{\cos x = a,}$ $\quad -1 \le a \le 1;$

$x = (-1)^k \pm \arccos a + 2k\pi,$

1. $\cos x = 0,$ $\quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi;$

2. $\cos x = 1,$ $\quad x = 2k\pi;$

3. $\cos x = -1,$ $\quad x = \pi + k\pi;$

4. $\cos^2 x = a,$ $\quad 0 \le a \le 1,\ x = \pm\arccos\sqrt{a} + k\pi;$

$\underline{tgx = a,}$ $\quad a \in R;$

$x = arctga + k\pi;$

1. $tgx = 0,$ $\quad x = k\pi;$

2. $tgx = 1,$ $\quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi;$

3. $tgx = -1,$ $\quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,$

4. $tg^2 x = a,$

$a \in [0,\infty),\ x = \pm arctg\sqrt{a} + k\pi;$

$\underline{ctgx = a,}$ $\quad a \in (0,\infty),$

$x = arcctga + k\pi;$

1. $ctgx = 0,$ $\quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi;$

2. $ctgx = 1,$ $\quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi;$

3. $ctgx = -1,$ $\quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,$

4. $ctg^2 x = a,$

$a \in (0,\infty),\ x = \pm arcctg\sqrt{a} + k\pi;$

Решение тригонометрических неравенств
(Тригонометриялық теңсіздіктерді шешу)

$\underline{\sin x > a,}$ или $\underline{\sin x < a,}$ $\quad |a| \le 1;$

1. $\sin x > 0,$ **ответ:** 2kπ<x< π+2kπ;

2. $\sin x < 0,$ -π+2kπ<x< 2kπ;

3. $\sin x > a,$ arcsina+2kπ<x< π-arcsina+2kπ;

4. $\sin x < a,$ -π-arcsina+2kπ<x< arcsina+2kπ;

$\underline{\cos x > a,}$ или $\underline{\cos x < a,}$ $\quad |a| \le 1;$

1. $\cos x > 0,$ **ответ:** -π/2+2kπ<x< π/2+2kπ;

2. $\cos x < 0,$ π/2+2kπ <x< 3π/2+2kπ;

3. $\cos x > a,$ -arccosa+2kπ<x<arccosa+2kπ;

4. $\cos x < a,$ arccosa+2kπ<x<2π-arccosa+2kπ;

$tgx > a,$ или $tgx < a,$ $a \in R;$

1. $tgx > 0,$ **ответ:** kπ<x< π/2+kπ;

2. $tgx < 0,$ -π/2+kπ <x< kπ;

3. $tgx > a,$ arctga+kπ<x< π/2+kπ;

4. $tgx < a,$ -π/2+kπ<x<arctga+kπ;

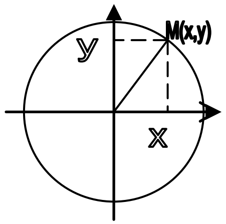
$ctgx > a,$ или $ctgx < a,$ $a \in R;$

1. $ctgx > 0,$ **ответ:** kπ<x< π/2+kπ;

2. $ctgx < 0,$ -π/2+kπ <x< kπ;

3. $ctgx > a,$ kπ<x< arcctga+kπ;

4. $ctgx < a,$ arcctga+kπ<x<π+kπ;



$$\sin a = \frac{y}{R}, tga = \frac{y}{x},$$

$$\cos a = \frac{x}{R}, ctg = \frac{x}{y},$$

Арккосинус,арксинус,арктангенс

1. $\arcsin x = \varphi,\ -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \Rightarrow\ \sin\varphi = x, |x| \le 1;$

2. $\arccos x = \varphi,\ 0 < \varphi < \pi \Rightarrow\ \cos\varphi = x, |x| \le 1;$

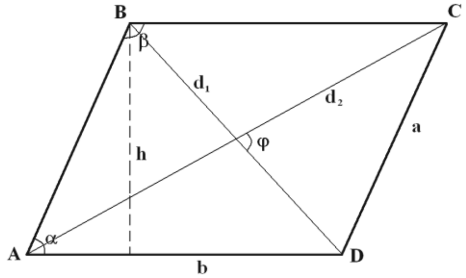
3. . $arctgx = \varphi,\ -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \Rightarrow\ tg\varphi = x;$

4. $\sin(\arcsin x) = x;$ **5.** $\cos(\arccos x) = x;$

6. $tg(arctgx) = x;$ **7.** $ctg(arcctgx) = x;$

Пример (Мысал):
sin(arcsin 0)=0, cos(arcos 0)=π/2,

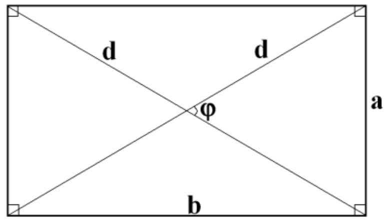
Параллелограм



$$\alpha + \beta = 180°;$$

$$S = b \cdot h = a \cdot b \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi;$$

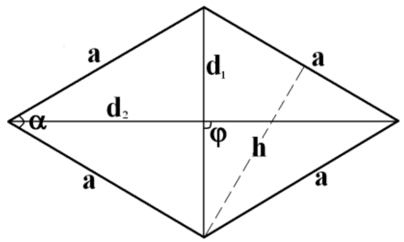
$$2a^2 + 2b^2 = d_1^{\ 2} + d_2^{\ 2};$$



$$P = 2a + 2b;$$

$$S = ab = \frac{1}{2} d^2 \sin\varphi;$$

Ромб



$$P = 4 \cdot a$$

$$S = a \cdot h$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi = a^2 \sin\alpha$$

2.Медианы:

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot(b^2+c^2)-a^2};$$
$$m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot(a^2+c^2)-b^2};$$
$$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot(a^2+b^2)-c^2};$$
$$m_a{}^2+m_b{}^2+m_c{}^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2);$$

3.Биссектрисы:

$$l_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)};$$
$$l_b=\frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)};$$
$$l_c=\frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)};$$

$$S_\Delta=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)};$$

$$R=\frac{p}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma};$$

Площадь правильного многоугольника (Дұрыс көпбұрыштардың ауданы)

$$S=r^2\cdot n\cdot tg\frac{180^\circ}{n};P=2\cdot r\cdot n\cdot tg\frac{180^\circ}{n};$$

Сумма внутренних углов многоугольника (Көпбұрыштардың ішкі бұрыштардың қосындысы)

$$180^\circ(n-2);$$

tg(arctg 1)=π/4, ctg(arcctg 0)= π/2;

$$\arcsin x=\arccos\sqrt{1-x^2}=arctg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=arcctg\frac{\sqrt{1-x^2}}{x};$$

$$arctgx=arcctg\frac{1}{x}=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$

Пример (Мысал):

$$\arcsin\frac{1}{2}=\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=arctg\frac{1}{\sqrt{3}}=arcctg\sqrt{3}\Rightarrow x=\frac{\pi}{6};$$
$$arctg1=arcctg1=\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}=\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow x=\frac{\pi}{4};$$

$$\sin x=\sqrt{1-\cos^2x}=\frac{tgx}{\sqrt{1+tg^2x}}=\frac{1}{\sqrt{1+ctg^2x}};$$
$$\cos x=\sqrt{1-\sin^2x}=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2x}}=\frac{ctgx}{\sqrt{1+ctg^2x}};$$
$$tgx=\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2x}}=\frac{\sqrt{1-\cos^2x}}{\cos x}=\frac{1}{ctgx};$$
$$ctgx=\frac{\sqrt{1-\sin^2x}}{\sin x}=\frac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2x}}=\frac{1}{tgx};$$
$$\sin x\sin y\sin z=\frac{[\sin(x+y-z)+\sin(y+z-x)+\sin(z+x-y)-\sin(x+y+z)]}{4};$$
$$\sin x\cos y\cos z=\frac{[\sin(x+y-z)+\sin(x-y-z)+\sin(z+x-y)+\sin(x+y+z)]}{4};$$
$$\sin x\sin y\cos z=\frac{[-\cos(x+y-z)+\cos(y+z-x)+\cos(z+x-y)-\cos(x+y+z)]}{4};$$
$$\cos x\cos y\cos z=\frac{[\cos(x+y-z)+\cos(y+z-x)+\cos(z+x-y)+\cos(x+y+z)]}{4};$$

Арифметическая прогрессия (Арифметикалық прогрессия)

$a_1,a_2,...,a_{n-2},a_{n-1},a_n.$ $\quad d=a_2-a_1=a_n-a_{n-1}.$

1. $a_2=\dfrac{a_1+a_3}{2},$ $\quad a_n=\dfrac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2};$

2. $a_n = a_1 + d(n-1);$ $a_n = a_k + d\cdot(n-k);$

3. $S_n = \dfrac{a_n + a_1}{2}\cdot n;$ $S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2}\cdot n;$

Геометрическая прогрессия
(Геометрикалық прогрессия)

$b_1, b_2, ..., b_{n-2}, b_{n-1}, b_n.$ $q = \dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{b_3}{b_2} = \dfrac{b_n}{b_{n-1}} = ...$

$b_n = b_k \cdot q^{n-k},$ $b_n^2 = b_{n-1}\cdot b_{n+1},$ $b_n = \sqrt{b_{n-1}\cdot b_{n+1}};$

$$S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q-1} = \frac{b_1\cdot q^{n-1}\cdot q - b_1}{q-1} = \frac{b_1\cdot(q^n - 1)}{q-1}, q>1, q\neq 1;$$

Сумма бесконечной геометрической прогрессии при |q|<1.
(|q|<1 болғандағы, шексіз геометрикалық прогрессияның қосындысы)

$$S = \frac{b}{1-q};$$

Показательные уравнения
(Көрсеткішті теңдеу)

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x), a>0, a\neq 1;$$

$$\left.\begin{array}{l} Aa^{2x} + Ba^x + C = 0 \\ a^x = y \end{array}\right\} \Rightarrow Ay^2 + By + C = 0;$$

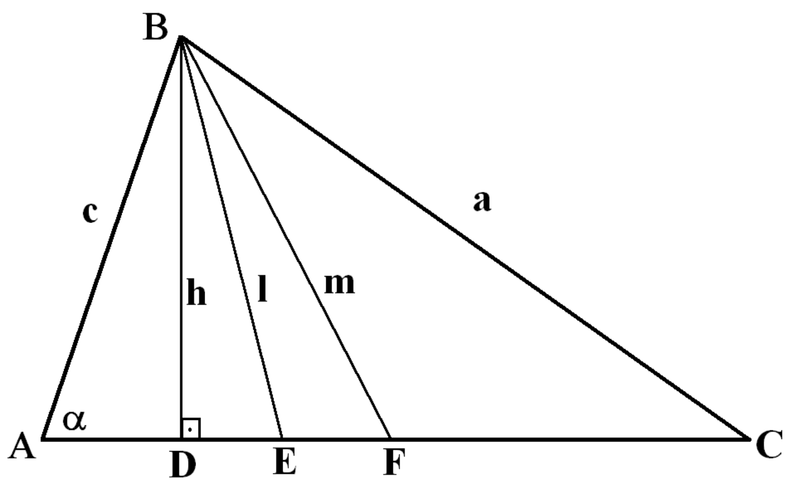
Виды(Түрлері):

1. $a^{f(x)} = a^m \Rightarrow f(x) = m;$

2. $a^{f(x)} = 1 \Rightarrow a^{f(x)} = a^0 \Rightarrow f(x) = 0;$

3. $a^{f(x)} = b, a>0, a\neq 1, b>0 \Rightarrow f(x) = \log_a b;$

Площадь треугольника.
(Үшбұрыш ауданы)



$1.S_\Delta = \dfrac{AC\cdot h}{2}$

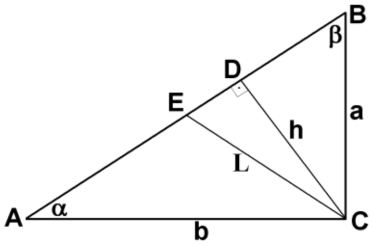
$2.S_\Delta = \dfrac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\alpha = \dfrac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\beta = \dfrac{1}{2}AC\cdot BC\cdot\sin\gamma$

$3.S_\Delta = \dfrac{abc}{4R} = p\cdot r$

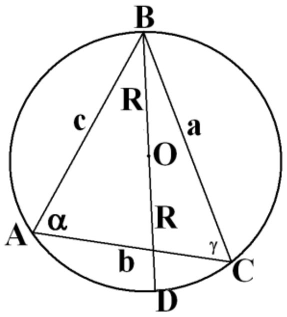
1.Высоты:

$$h_a = \frac{2S}{a}; h_b = \frac{2S}{b}; h_c = \frac{2S}{c};$$

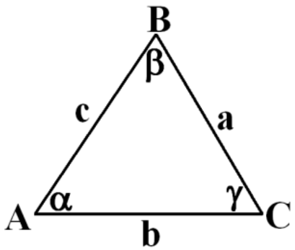
$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c};$$



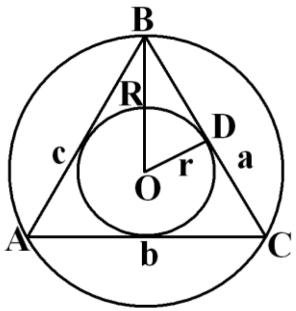
CD=h- высота(биіктігі)
L-биссектриса
$a=\dfrac{h}{\cos\alpha}, b=\dfrac{h}{\sin\alpha};$
$\cos\angle DCE=\dfrac{DC}{CE}=\dfrac{h}{L}$



DO=BO=R
$a=2R\sin A, b=2R\sin B, c=2R\sin C;$
$\sin\alpha=\dfrac{a}{2R};\sin\beta=\dfrac{b}{2R};\sin\gamma=\dfrac{c}{2R};$
Следовательно:
$\dfrac{a}{\sin a}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}=2R$
R-радиус описанного круга(сыртай сызылған шеңбердің радиусы)
r- радиус вписанного круга(іштей сызылған шеңбердің радиусы)



$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha;$
$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta;$
$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma;$



1.$tg\dfrac{A}{2}=\dfrac{r}{p-a}, tg\dfrac{B}{2}=\dfrac{r}{p-b}, tg\dfrac{C}{2}=\dfrac{r}{p-c}$
2.$R=\dfrac{abc}{4S}, R=\dfrac{a}{2\sin A},$
$R=\dfrac{b}{2\sin B}, R=\dfrac{c}{2\sin C};$

4. $\left.\begin{array}{l} P(a^{f(x)})=0 \\ a^x=y, y>0 \end{array}\right\} \Rightarrow P(y)=0;$

Пример (Мысал):
$2^{x+1}+4^{x+3}=1032 \Rightarrow \begin{cases} 2\cdot 2^x+2^{2x}\cdot 64=1032 \\ 2^x=y \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} 64\cdot y^2+2\cdot y-1032=0 \\ y>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=4 \\ 2^x=y \end{cases} \Rightarrow x=2;$

Логарифмы и их свойства
(Логарифмдер және олардың қасиеттері)

$$a^{\log_a b}=b, a>0, a\neq 1;$$

1. $\log_a(m\cdot n)=\log_a m+\log_a n, m>0, n>0;.$

2. $\log_a\dfrac{m}{n}=\log_a m-\log_a n;$ **3.** $\log_a m^k=k\log_a m;$

4. $\log_a\sqrt[k]{m}=\dfrac{1}{k}\log_a m;$ **5.** $\log_a 1=0;$

6. $\log_a a=1;$ **7.** $\log_{a^m} b^m=\log_a b;$

8. $\log_{a^k} m=\dfrac{1}{k}\log_a m;$ **9.** $M^{\log_a N}=N^{\log_a M};$

10. $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a};$ **11.** $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a};$

Логарифмические уравнения
(Логарифмдік теңдеу)

$\log_a f(x)=\log_a g(x)\Rightarrow f(x)=g(x), a>0, a\neq 1;$

Виды(Түрлері):

1. $\log_a f(x)=b\Rightarrow f(x)=a^b;$ **2.** $\log_a f(x)+\log_a g(x)=\log_a h(x)\Rightarrow$
$\log_a\dfrac{f(x)\cdot g(x)}{h(x)}=0\Rightarrow\dfrac{f(x)\cdot g(x)}{h(x)}=1;$

3. $\left.\begin{array}{l} P(\log_a f(x))=0 \\ \log_a f(x)=y \end{array}\right\} \Rightarrow P(y)=0;$

4. $\log_{h(x)} f(x)=b \Rightarrow \begin{cases} h(x)>0, \\ h(x)\neq 1, \\ f(x)=(h(x))^b; \end{cases}$

5. $\log_{k(x)} f(x)=\log_{k(x)} g(x) \Rightarrow f(x)=g(x);$

Пример (Мысал): $\log_{x^2-1}(x^3+6)=\log_{x^2-1}(4x^2-x);$

Решение (Шешуі):

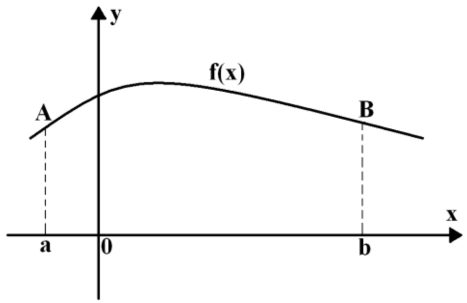
$$\begin{cases} x^2-1>0 \\ x^2-1\neq 1 \\ 4x^2-1>0, x^3+6>0 \\ 4x^2-1=x^3+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1, x<-1 \\ x\neq \pm\sqrt{2} \\ \left((-\infty,0)\cup(1/4,\infty)\right)\cap\left(-\sqrt[3]{6},\infty\right) \\ x_1=-1, x_2=2, x_3=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1=2, x_2=3;$$

Производная (Туынды)	**Интегрирование (Интегралдау)**
$C'=0$	$\int f(x)dx=F(x)+c$
$(x)'=1$	$\int (f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx+c$
$(x^n)'=nx^{n-1}$	$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+c$
$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$	$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$
$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\int \frac{dx}{x}=\ln x+c$
$\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+c$
$\left(\frac{u}{c}\right)'=\frac{1}{c}\cdot u'$	$\int e^x dx=e^x+c$

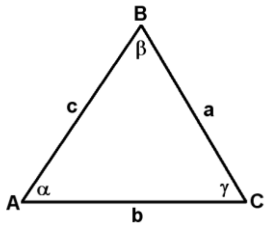
Длина кривой
Қисық сызық ұзындығы

$y=f(x)$



$$|AB|=l=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\cdot dx$$

Геометрия



$\angle A=\alpha, \angle B=\beta, \angle C=\gamma;$

$\angle A+\angle B+\angle C=\alpha+\beta+\gamma=180°(\pi);$

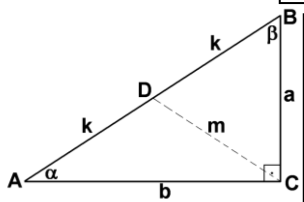
Стороны (жақтары):

$AB=b, BC=a, AC=c.$

Периметр: $AB+BC+AC=a+b+c$

Полупериметр (жартыпериметр):

$p=\frac{a+b+c}{2}$



$\frac{b}{c}=\cos\alpha, \frac{a}{c}=\sin\alpha,$

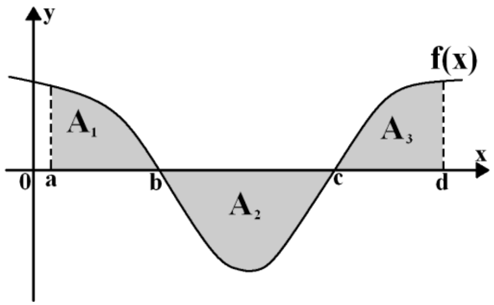
$\frac{a}{b}=tg\,\alpha, \frac{b}{a}=ctg\,\alpha;$

$\angle C=90°, \angle A=\alpha, \angle B=\beta,$

$CD-m(медиана)$

$AD=DB=k \Rightarrow a=2k\sin\alpha, b=2k\cos\alpha;$

c)



$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \int_a^b f(x)\cdot dx - \int_b^c f(x)\cdot dx + \int_c^d f(x)\cdot dx;$$

<u>Площадь ограниченной двумя линиями</u>
<u>Екі сызықпен шектелген аудан</u>

$$A = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| \cdot dx$$

<u>Объёмы</u>
<u>Көлемдер</u>

a) объём тела функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ вокруг x-оси

$y = f(x)$ функциясы $[a, b]$ аралағында x-осінен айналдыра бұрғанда дененің көлемі:

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) \cdot dx = \pi \cdot \int_a^b y^2 \cdot dx;$$

b) объём тела функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ вокруг y-оси

$y = f(x)$ функциясы $[c, d]$ аралағында y-осінен айналдыра бұрғанда дененің көлемі:

$$V_y = \pi \cdot \int_c^d f^2(y) \cdot dy = \pi \cdot \int_c^d x^2 \cdot dy;$$

$\left(\frac{c}{u}\right)' = -\frac{c}{u^2}$	$\int \sin x dx = -\cos x + c$
$\left(u^n\right)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$	$\int \cos x dx = \sin x + c$
$\left(\sin u\right)' = (u)' \cdot \cos u$	$\int C dx = cx + c$
$\left(\cos u\right)' = -(u)' \cdot \sin u$	$\int x dx = \frac{x^2}{2} + c$
$\left(tgu\right)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$
$\left(ctgu\right)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = ctgx + c$
$\left(e^u\right)' = u' \cdot e^u$	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\|tg\frac{x}{2}\right\| + c$
$\left(a^u\right)' = a^u \cdot u \cdot \ln a$	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\|tg(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\right\| + c$
$\left(\ln u\right)' = \frac{u'}{u}$	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + c$
$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln u}$	
$(u + v)' = u' + v'$	
$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	

Сложная функция
(Күрделі функция)

1. $(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Пример (Мысал):

$f(x) = (3x^2+5)^3 \Rightarrow f'(x) = ((3x^2+5)^3)' = 3(3x^2+5)^2 \cdot 6x = 18x(3x^2+5)^2;$

2. $f(u) = f(a \cdot x + b) \Rightarrow f'(u) = f'(a \cdot x + b) = a \cdot f(ax+b);$

Пример (Мысал): $f(u) = f(4 \cdot x + 5) \Rightarrow f'(u) = f'(4 \cdot x + 5) = 4 \cdot f(4 \cdot x + 5);$

Уравнение касательной к графику $y = f(x)$
($y = f(x)$ функциясына жүргізілген жанама теңдеуі)

$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ или $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$,

$M(x, x_0)$ – точка пересечения;

Пример(Мысал): $f(x) = \ln(2 \cdot x) + 1/x^2$, в точке $x_0 = 0.5$

$f(x_0) = \ln(2 \cdot 0.5) + 1/(0.5)^2 = 4;$

$f'(x) = \frac{2}{2 \cdot x} - \frac{2}{x^3} \Rightarrow f'(x_0) = 2 - 16 = -14;$

$y = 4 - 14 \cdot (x - 0.5) \Rightarrow y = -14x + 11;$

Определённый интеграл
(Анықталған интеграл)

$F'(x) = f(x);$

1. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a);$

2. $\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx;$

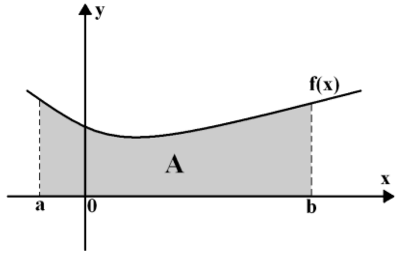
3. $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx;$

4. $\int_a^b f(kx+p)dx = \int_{ka+p}^{kb+p} \frac{f(t)dt}{k};$

5. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, c \in [a,b];$

Применение определённого интеграла
Анықталған интегралдың қолданылуы

a)Если (егер) $f(x) \geq 0$ $[a,b]$, тогда (онда), $A = \int_a^b |f(x)| \cdot dx$



b) Если (егер) $f(x) \leq 0$ $[a,b]$, тогда (онда), $A = -\int_a^b |f(x)| \cdot dx$