**Кіріспе**

Математика қазіргі кезде ғылым саласында ерекше орын алады. Математиканың ғылыми теориялық ізденістерімен бірге тәжірибелік қолданыстарының да ауқымының кең екені белгілі. Математиканы оқытуда математика ғылымынан мағлұмат алып, математикалық әдістерді меңгеріп, математикалық ойлауын дамытуға міндетті түрде қажет деп саналатын математикалық білім таңдап алынады.

Мектеп курсының алгебра пәнінде теңсіздіктерді дәлелдеу, сонымен қатар арифметикалық орта ұғымы мен геометрия сабағында геометриялық ортаны зерттеу қарастырылады. Аталған арифметикалық орта мен геометриялық орта және теңсіздіктер арасында байланысты орнату мәселесі қызықтыруы мол мәселелердің бірі екендігі анық. Бұл дипломдық жұмыста теңсіздіктерді дәлелдеу әдістері белгілі бір нысаны бар теңсіздіктердің стандартты емес шешімін табуға бағытталған.

Дипломдық жұмыста осы мәселені тереңірек зерттеу нәтижесінде теңсіздіктерді пайдалану арқылы арифметикалық және геометриялық орталарының байланысын Коши теңсіздігі негізінде шешуге болатындығына арналған. Дипломдық арнайы әдебиеттерден танысып, жалпы теңсіздіктер тақырыбы мен тамаша теңсіздіктер, олардың колданылуын толық зерттеуге арналған. Гипотезаларды дәлелдеудің әртүрлі әдістерімен толық танысу мен зерттеу теңсіздіктер жайлы білімді толықтыру үшін ғана емес, сонымен қатар көптеген есептерді (соның ішінде олимпиадалық есептерді) шешу аталған принципке негізделгендіктен де пайдалы болуы мүмкін. Теңсіздіктерді дәлелдеу және шешуге арналған есептерді шығару, теңдеулер мен теңдеулер жүйесін, геометриялық және физикалық есептерді шығаруда түрлі теңсіздіктерді дәлелдеу принципі кеңінен қолдануға арналған зерттеулер қарастырылады.

Математикадан қорытынды емтихандар мен олимпиадаларда ұсынылатын есептерді шешу кезінде бітірушілерге кез келген белгілі математикалық әдістерді қолдануға болады. Қорытынды емтихандар мен олимпиадалар есептерін шешуде жалпы білім беретін мектепте оқытылған да, оқытылмаған да түрлі тәсілдерді ақпараттық мақсатта пайдалануға мүмкіндік беріледі. Осының барлығы жалпы білім беретін мектептің математикалық оқу бағдарламасына енбеген тұжырымдамалар мен ережелерге негізделген математикалық әдістерді түлектердің өз бетінше меңгеру қажеттілігін көрсетеді. Мұндай ұғымдарға, мысалы, Коши, Бернулли, Чебышев, Йенсен теңсіздіктерін жатқызуға болады. Бұл теңсіздіктерді пайдалану дәлелдеулер жүргізуді жеңілдетеді.

Бұл жұмыс мектеп бағдарламасы аясында да, одан тыс математика саласында да жеткілікті жоғары деңгейде білім алған, бірақ оны әлі де жетілдіргісі келетін оқушыларға арналған.

Дипломдық жұмыста жоғары сыныптардың алгебра курсының тапсырмаларын шешуде жалпы «тамаша теңсіздіктер» деп аталатын түрлі теңсіздіктердің қолданылуы сипатталған. «Тамаша теңсіздіктер» мектеп курсында арнайы қарастырылмайтындықтан, оларды қолдану жеке теңсіздіктерді шешуді қарапайым түрде шешуге мүмкіндік береді.

Арнайы әдебиеттермен танысу арқылы «тамаша теңсіздіктер» көмегімен әртүрлі типтегі есептерді шығаруға болатындықтан, түрлі гипотезаларды дәлелдеудің тиімді әдісі болып табылатындықтан және оны математика мен физиканың көптеген есептерін шешу үшін қолдануға болады.

**Зерттеу объектісі** - алгебралық теңсіздіктер.

**Зерттеу пәні**- тамаша теңсіздіктерді қолдану міндеттері.

**Зерттеудің мақсаты** – Теңсіздіктерді шешудің негізгі әдістерін жүйелеу, айнымалыдан тәуелді теңсіздіктерді шешудің арнайы әдістері бойынша теориялық материалдарды жүйелеу және оны есептерді шешудің жалпы әдістерін қалыптастыру.

**Зерттеу міндеттері:**

1) тамаша теңсіздіктердің пайда болу тарихын зерттеу;

2)тамаша теңсіздіктерді пайдалану теоремаларын және олардың салдарын сипаттау;

3) теңсіздіктерді шешу мен дәлелдеуде тамаша теңсіздіктерді қолдану әдістері мен тәсілдерін қарастыру;

**Қойылғaн міндеттерді шешy үшін зерттеyдің түрлі әдістері қолдaнылaды:**

* зерттеy мәселесі бойыншa жaзылғaн мaтемaтикaдaн, психологиядaн, педaгогикaдaн және мaтемaтикaны оқытy әдістемесінен отaндық және шетел әдебиеттерін оқып, тaлдay;
* мaтемaтикaдaн ортa мектеп оқyлықтaрынa, оқy құрaлдaры мен бaғдaрлaмaлaрынa тaлдay жaсay;
* мектептердің іс-тәжірибесін оқып, үйренy;

**Зерттеyдің ғылыми жaңaлығы:**

* Мaтемaтикaны оқытy процесінде оқyшылaрдың мaтемaтикaғa қызығyшылығын aрттырyды қaмтaмaсыз ететін теңдеулер мен теңсіздіктерді шешудің түрлі әдіс-тәсілдері қaрaстырылды.
* ұсынылып отырғaн мaтериaлдaр бойыншa мектеп мұғaлімдерінің дипломдық жұмыстағы материалдарды қaндaй оқyлықпен сaбaқ өткізілгеніне қaрaмaстaн, еркін қолдaнyынa болaды.

**Зерттеyдің прaктикaлық құндылығы:** Емтихан жұмыстарында, тест есептерін шешуде теңдеулер мен теңсіздіктер шешу оқушылардың қиындықтар тудырады. Диплом жұмысы осы қиындықтарды азайтуға бағытталған.

**Дипломдық жұмыстың құрылымы мен көлемі.**  Дипломдық жұмыс кіріспеден, екі бөлімнен, қорытындыдaн, пaйдaлaнылғaн әдебиеттер тізімінен тұрaды.

**1.** **МЕКТЕП МАТЕМАТИКА КУРСЫНДАҒЫ ТЕҢСІЗДІКТЕР ЖӘНЕ ОЛАРДЫ ШЕШУ ЖОЛДАРЫ**

**1.1 Мектепте «теңсіздік» ұғымын енгізу және оқыту (бағдарлама бойынша)**

Негізгі мектеп бағдаламасында (5-9 сыныптар бойынша) теңсіздіктер ұғымын енгізуге оны оқытуға төмендегідей сағаттар қарастырылған:

5-сыныпта

Координаталық сәуле. Натурал сандарды салыстыру. Қос теңсіздік

Жай бөлшектер мен аралас сандарды координаталық сәуледе кескіндеу

Жай бөлшектерді және аралас сандарды салыстыру

Ондық бөлшектерді координаталық сәуледе кескіндеу. Ондық бөлшектерді салыстыру

6-сыныпта

Координаталық түзу

Рационал сандарды салыстыру

Сандық теңсіздіктер және олардың қасиеттері

Сандық аралықтар. Сандық аралықтардың бірігуі мен қиылысуы

Бір айнымалысы бар сызықтық теңсіздік. Бір айнымалысы бар сызықтық теңсіздіктерді шешу

Бір айнымалысы бар сызықтық теңсіздіктер жүйесі. Бір айнымалысы бар сызықтық теңсіздіктер жүйесін шешу

Айнымалысы модуль таңбасының ішінде берілген бір айнымалысы бар сызықтық теңсіздік

8-сыныпта

Квадрат теңсіздік

Рационал теңсіздік

Теңсіздіктер жүйелерін шешу

9-сыныпта

Екі айнымалысы бар теңсіздіктер

Екі айнымалысы бар сызықтық емес теңсіздіктер жүйелері

Мектепте математиканы оқытудың негізгі міндеттері–қазіргі қоғам мүшесіне күнделікті өмірде және еңбек ету барысында, сыбайлас пәндерді оқуда және оқуды одан әрі жалғастыруда қажетті болатын жүйелі математикалық білімдер мен біліктіліктердің саналы және сапалы түрде игерілуін қамтамасыз ету. Осы негізгі міндеттерімен, қатар математиканы тереңдетіп оқыту, оқушының пәнге деген қызығушылығының тұрақты болуын, математикалық қабілетті анықтауды және оны дамытуды, математикамен байланысты кәсіби бағдар беруді, жоғары оқу орынында оқуға дайындықты қамтамасыз етеді.

**1.2 Сандық теңсіздіктер**

Теңсіздік ұғымы жазылу тәсіліне байланысты анықталатыны белгілі. Сонымен, ≠ (тең емес), < ( кіші), > (үлкен), ≤ (кіші немесе тең) немесе ≥ (үлкен немесе тең) таңбалары арқылы құрылған алгебралық өрнектер теңсіздіктер деп аталады. Сандық теңсіздіктер анықтамасын берейік:

**Анықтама.** Сандық теңсіздік деп теңсіздік белгісінің екі жағында да сандар немесе сандық өрнектер болатын теңсіздіктерді айтады.

Сандық теңсіздіктердің анықтамасынан мынадай қасиеттері шығады:

* *a* саны *b* санынан үлкен, егер *a−b* айырмасы оң сан болса ғана;
* *a* саны *b* санынан кіші, егер *а−b* айырмасы теріс сан болса ғана;
* *a* саны *b* санына тең, егер *a−b* айырмасы нөлге тең болса ғана*.*

Жоғарыда аталған үш негізгі теңсіздікке байланысты, < және > салыстыру белгілерін қолдану мынадай қасиеттерге байланысты қарастырылады:

Кез келген *а* саны үшін *a<a* және *a>a* теңсіздіктері ақиқат болмайтынын білдіретін *антирефлексивтілік* қасиеті.

Шынында да, кез келген *а* саны үшін *a−a=0* теңдігі орындалатыны белгілі, осыдан тең сандардың айырымдық анықтамасы арқылы *a=a* теңдігі шығады. Демек*, a<a* және *a>a* жалған теңсіздіктер.

Мысалы, 5*<5,*  жалған теңсіздіктер

*Антисиметриялық* қасиеті: егер *а* және *b* сандары үшін *a<b* теңсіздігі орындалса, онда *b>a* теңсіздігі дұрыс болады, ал *а>b* теңсіздігі орындалса, онда *b<a* теңсіздігі дұрыс болады.

Мысалы, 17*<*19 теңсіздігін 19*>*17 түрінде жазуға болады, сол сияқты -2,78*>-*5,16, *-*5,16*<*-2,78.

*Транзитивтілі*к қасиеті: *a*, *b* және *c* сандары *a<b* және *b<c* болатындай болса, онда *a<c*, ал *а>b* және *b>*c болса, онда *а>c*.

Транзитивтілік қасиетінің бірінші тұжырымын дәлелдеп көрейік. *a<b* және *b<c* шарттары *a−b* және *b−c* теріс сандар екенін білдіреді. *a−c* айырмасын *(a−b)+(b−c)* түрінде көрсетуге болады, ол теріс сандарды қосу ережесінен туындайтын *a*−*b* және *b−c* екі теріс сандарының қосындысы ретінде теріс сан болып шығады. Осылайша, *a − c* теріс сан, ол дәлелденуі тиіс *a<c* дегенді білдіреді. Транзитивтілік қасиетінің екінші бөлігі дәл осылай дәлелденеді.

Мысалы, -2*<7, 7<13* болғанынан *-2<13* теңсіздігі шығады*.*

Оны жоғарыдағы «көп» және «аз» қатынастарының анықтамасына сілтеме жасай отырып негіздейік. Бірінші бөлімнен бастайық. a<b болғандықтан, a−b теріс сан болады. Бұл жағдайда b−a=−(a−b) оң сан, а−b теріс санына қарама-қарсы сан. Сондықтан b>a. Қарастырылып отырған мүліктің екінші бөлігі де дәл осылай дәлелденеді.

Кез келген *а* және *b* сандары үшін мынадай теңсіздіктер өзара теңкүштесдеп есептеледі*: а<b, b>a, a–b<0* және *b–a>0.* Сонымен қатар мына теңсіздіктер де теңкүштес болады: *аb, ba, a–b0 и b–a0.* Бұл теңсіздіктерді дәлелдеу үшін көбіне мынадай қасиетті пайдаланылады*:* егер *аb* және *bа* болса*,* онда *а=b.* Есептерді шешуде жиі қолданылатын сандық теңсіздіктердің қасиеттерін атап өтейік*:* кез келген *а, b, с* және *d* сандары үшін**1) мынадайтеңсіздіктерден *аb* және *bс* мына теңсіздіктер алынады*: ас;* 2) *аb* теңсіздігіне мына теңсіздіктеңкүштес *а+сb+с; 3) с* саны оң сан болғанда *аb* теңкүштес *асbс; 4) с* саны теріс сан болғанда *аb* теңкүштес  *bсас; 5) аb* және *сd* теңсіздіктерінен *а+сb+d* және *а–db–с* шығады*; 6) a, b, c, d* сандары оң сан болғанда *аb* және *cd* теңсіздіктерінен *acbd* және  *a/d**b/c* шығады*.*

Барлық көрсетілген 1)-6) қасиеттерінде “ ” таңбасының орнына “<” таңбасын қоюға болады.

Сандық теңсіздіктердің мынадай қасиеттерін пайдалануға болады  7) кез келген  және натурал  *n* сандары үшін  *a<b*  теңкүштес  **

Мынадай сандық теңсіздіктерді шешу мысалдарын қарастырайық.

**Мысал 1.2.1** Сандарды салыстырыңыздар* а)* және **

*б) және *

***Шешуі****а)*және *.* Ал *125<243,* онда дәрежелік сандардың қасиеті бойынша *7)* ал енді **

*б)* көрсетілген сандардың квадраттарын салыстыру жеткілікті боладыжәне** Айталық*, \* -* теңсіздіктің қандай да бір белгісі болсын және** Бұл теңсіздік 2) қасиет бойынша (екі жағына да (–5) санын қоссақ)  санымен тең күштес болады, ал ол өз кезегінде 7) қасиет бойынша*,* яғни 24\*25 санымен тең күштес Осыдан шығатыны, \* белігісіндегі - “<“ белгісін береді және қорытындысында **шығады.

**Мысал 1.2.2**. Сандарды салыстырыңыздар:  олай болса .

2-тәсіл.  және  сандарын 1-ге дейінгі дәлдікпен бағалаймыз.
 яғни

 яғни  .

 сандарының әрқайсынан осы аралықтан (интервалдың) ортасымен, санымен саластырамыз.
 делік, сонда   онда

теңсіздігі тура теңсіздік болып шығады.
Енді десек,
Соңғы шыққан теңсіздік тура теңсіздік емес,   дегеніміз қате, олай болса . Сонымен,  , болады.

Оқушыларға орындауға мынадай тапсырмаларды беруге болады.

**Есеп1** Айталық болсын. а)егер *ab=100* болса, *a+b* қосындысы ең аз шама қабылдайындай мәндерді табыңыздар; б) егер *a+b=100* болса, *ab* көбейтіндісі ең үлкен шама қабылдайындай мәндерді табыңыздар **

***Нұсқау:***Коши теңсіздігін қолдануға болады**

**Есеп 2** Кез келген *a* және *b* екі саны үшін төмендегі теңсіздіктердің орындалатынын дәлелдеңіздер**

а)    б) 

 **Есеп 3** Сандарды салыстырыңыздар а) және 

б) және  

 Олимпиадалық есептердің көпшілігінде бүтін сандарға байланысты есептерді шығару керек болады  Сондықтан мынадай қасиетті пайдалану маңызды болып есептеледі  теңсіздігі *a* және *b* бүтінсандары үшін теңсіздігімен тең күштес болады

**Есеп 4**  Карабастың сауда дүкенінде тасбақалар мен сүліктер рубльмен сатылады, сонымен қатар, *42* сүліктердің бағасы 35 рубльден қымбат, бірақ олар *36*тасбақаның бағасынан арзан болады  Буратинода *100* рубль болса, *8* тасбақаны сатып алуына бола ма?

 ***Нұсқау:***егер *m руб-* сүліктің бағасы мен *n руб-* тасбақаның бағасы *(m,n -* натурал сандар) болса, онда және *,* осыдан**болып шығады.

**Есеп 5** а) Үшбұрыштың екі медианасының қосындысы оның периметрінен кіші болатынын дәлелдеңіздер б) Егер *a, b*, *c* – үшбұрыш қабырғаларының ұзындығы болса, онда теңсіздігі орындалатынын дәлелдеңіздер.

**1.3 Айнымалыға тәуелді теңсіздіктер. Сызықтық теңсіздіктер**

Теңсіздіктер те теңдіктер сияқты айнымалыға тәуелді болуы мүмкін. Мысалы, *x*>2, *x*<-5, *7x*+2>18, *3x*-15<0 теңсіздіктері *x* айнымалысына тәуелді теңсіздіктер және оларды шешуге болады.

Теңсіздікті шешу дегеніміз, берілген теңсіздік ақиқат болатын *х* айнымалысының мәндерін табу.

Теңсіздік ақиқат болатын айнымалының мәні теңсіздіктің шешімі деп аталады.

x > 2 теңсіздігінің оң жағында орналасқан 2 саны осы теңсіздіктің шекарасы деп аталады. Теңсіздіктің белгісіне қарай шекара теңсіздік шешімдерінің жиынына жатуы да, жатпауы да мүмкін.

x > 2 теңсіздігін қатаң теңсіздік деп атайды да, оны былай оқуға болады: «x 2-ден қатаң үлкен». Яғни, x айнымалысы қабылдайтын барлық мәндер 2-ден үлкен болуы керек. Әйтпесе, теңсіздік ақиқат болмайды.

Егер бізге қатаң емес x ≥ 2 теңсіздігі берілсе, онда бұл теңсіздіктің шешімдері 2 санының өзін қоса алғандағы 2-ден үлкен барлық сандар болар еді. Бұл теңсіздікте 2 шекарасы шешімдер жиынына жатады. Теңсіздік 2 саны ≥ 2 болғанда, біз 2 ≥ 2 шынайы теңсіздікті аламыз. Қатаң емес теңсіздік оның шарттарының ең болмағанда біреуі орындалса, ақиқат теңсіздікке айналады. 2 ≥ 2 теңсіздігі 2 = 2 шартын қанағаттандыратындықтан 2 ≥ 2 теңсіздігі ақиқат болады.

Теңсіздіктерді шешу кезінде мынадай қасиеттерді қолданылады: теңсіздіктің бір бөлігінен екінші бөлігіне мүшелерді ауыстыру, таңбасын өзгерту; теңсіздіктің екі жағын бірдей санға көбейту (немесе бөлу). Бұл қасиеттерді пайдалану бастапқы берілген теңсіздікке эквивалентті теңсіздікті алуға мүмкіндік береді. Шешімдері бірдей теңсіздіктер эквивалентті теңсіздіктер деп аталады.

Теңсіздіктерді шешу кезінде осы теңсіздіктің сол жағында айнымалы, ал оң жағында шекаралық мәні қалғанша, бастапқы теңсіздікті оған эквивалентті теңсіздікке ауыстыра беру керек.

Мынадай теңсіздіктерді қарастырайық:

|  |  |
| --- | --- |
| *kx* + *b* > 0,   *kx* + *b* ≥ 0,   *kx* + *b* < 0,   *kx* + *b* ≤ 0, | (1) |

мұндағы  ,   *x* - айнымалы, сызықтық теңсіздіктер (немесе бірінші дәрежелі теңсіздіктер) деп аталады.

(1) түріндегі берілген айнымалысы бар теңсіздікті ақиқат сандық теңсіздікке айналдыратындай айнымалының әрбір мәні теңсіздіктің шешеімі деп аталады.

Айнымалысы бар теңсіздіктерді шешу – оның барлық шешімдерін табу немесе шешімдері жоқ екенін дәлелдеу. Шешімдері беттесетін бір айнымалысы бар екі теңсіздік пара-пар теңсіздік деп аталады, дербес жағдайда шешімдері жоқ екі теңсіздік пара-пар деп аталады.

(1) түріндегі берілген теңсіздіктерінің шығарылу тәсілдері ұқсас болады, тек бірінші тұрған теңсіздікті шығаруға тоқталайық, яғни  *kx* + *b* > 0 теңсіздігінің шешімдерін табуды қарастырайық. Ол үшін мынадай жағдайлар қарастырылады:

1. *k*> 0 деп ұйғарайық, сонда

*kx* + *b* > 0       *kx* > -*b*       *x* > -b/k

осыдан, *kx* + *b* > 0 теңсіздігінде (*k* > 0) шешімдері мынадай түрде жазылады  (-b/k;+ );

1. *k* < 0 деп ұйғарайық, сонда

*kx* + *b* > 0      *kx* > -*b*      *x* < -b/k

осыдан, *kx* + *b* > 0 теңсіздігінде (*k* < 0) шешімдері түрде жазылады    (-;-b/k)

1. *k* = 0 болғанда теңсіздік 0·*x* + *b* > 0 түріне келеді де, *b* > 0 болатын барлық нақты сан теңсіздікке шешім бола алады, ал *b* ≤ 0 болғанда қарастырылып отырған теңсіздіктің шешімі болмайды.

Сызықтық (бірінші дәрежелі) теңсіздіктің шешімдері жайлы жоғарыда көрсетілгендерді көбінесе былай жазады: kx + b ( бірінші дәрежелі көпмүшелігі: а) k>0 болғанда барлық үшін теріс; үшін оң болады б) k<0 болғанда барлық үшін оң және барлық үшін теріс болады. Дербес жағдайда, екі мүшелігі санын білдіретін сандық осьтің нүктесінің оң жағында орналасқан барлық тер үшін оң сан, ал сол нүктенің сол жағында орналасқан барлық тер үшін теріс сан болады. Сонымен, нүктесі сандық осьтің екі бөлігінде орналасады: нүктесінің оң жағы үшін екімүшелігі оң, ал нүктесінің сол жағы үшін, ол – теріс сан болады.

Сызықтық теңсіздіктерді шешуге мынадай мысалдар қарастырайық:

a) 3*x* + 6 > 0   6 санын теңсіздіктің оң жағына шығарайық, сонда   3*x* > -6 болады. Теңсіздіктің екі жағын да 3-ке бөліп жібереміз, сонда   *x* > -2, демек, берілген теңсіздіктің шешімдер жиыны (-2;+) болады.

б) -2*x* + 3 ≥ 0.   3 санын теңсіздіктің оң жағына шығарамыз:   -2*x* ≥ -3. Енді теңсіздіктің екі жақтағы бөліктерін (-1)-ге көбейтіп жібереміз, сонда теңсіздіктің таңбасы қарама-қарсыға өзгереді, сонан соң теңсіздіктің екі жақ бөлігі 2-ге бөліп, мынадай шешімін табамыз   *x* ≤ 3/2, немесе бұл табылған шешімді мынадай жиындар түрінде көрсетуге де болады (-∞;3/2].

в) 2(x+1)+x<3x+1. Алдымен элементар түрлендірулер жасаймыз да сызықтық теңсіздікке келтіреміз: 2(*x* + 1) + *x* < 3*x* + 1      2*x* + 2 + *x* < 3*x* + 1      0·*x* + 1 < 0. 1 < 0 – жалған сандық теңсіздік шыққандықтан, бастапқы берілген теңсіздіктің шешімдері болмайды.

г) 3*x* + 2 ≥ 3(*x* - 1) + 1. Элементар түүрлендіру жасау нәтижесінде 3*x* + 2 ≥ 3(*x* - 1)+1 мынадай эквивалентті теңдеуге келтіреміз: 3*x* + 2 ≥ 3*x* - 3+1. Ұқсас мүшелерін біріктіргенде шығатыны:   0·*x* + 4 ≥ 0. Демек, кез келген нақты сан бастапқы берілген теңсіздіктің шешімі бола алады.

Сызықтық теңсіздікке келтірілетін теңсіздікті шешу мысалын қарастырайық:

**Мысал 1.3.1.** Мынадай теңсіздікті шешу керек .

Бөлшек оң мән қабылдауы үшін оның алымы да, бөлімі де оң сандар болуы керек, немесе алымы да, бөлімі де теріс сандар болуы қажет. Осы тұжырымды ескеріп, екі жүйеден тұратын екі теңсіздіктердің мынадай бірігуін құрамыз:

|  |
| --- |
|  |
|  |

   

 Алдымен мына теңсіздіктер жүйесінің шешімдерін тауып алайық

 



Бірінші жүйенің шешімі х > 1 теңсіздігімен тең күштес болады.

Ал енді мындай теңсіздіктер жүйесін шешу керек:

 



Екінші жүйенің шешімі x < -1 теңсіздігімен тең күштес болады.

Бастапқы берілген теңсіздіктің шешімдерін (берілген теңсіздікті ақиқат сандық теңсіздікке айналдыратын айнымалының шешімдер жиынын) жалпы түрде төмендегі тәсілдердің бірімен көрсетуге болады:

  3)  

**1.4 Квадраттық теңсіздіктер**

Интервалдар әдісін екінші дәрежелі алгебралық теңсіздіктерді шешуге қолданайық. Әдетте оларды квадраттық теңсіздіктер деп атайды.

 1

квадраттық теңсіздігін қарастырайық . «Толық квадратты бөліп шығару» тепе – тең түрлендіруін қолданып алатынымыз:



Сондықтан (1) теңсіздігі

 (2)

 теңсіздігіне пара – пар. болсын. Онда (12) теңсіздігі

 (3)

теңсіздігіне пара – пар.

 а) Егер  болса, онда (3) теңсіздігінің сол жағындағы белгісіздің кез келген  сандық мәнінде теріс емес саны мен  оң санының қосындысы түрінде, яғни (3) теңсіздігі ақиқат сандық теңсіздікке айналады. Демек, (3) теңсіздігі кез келген  үшін дұрыс. Басқа сөзбен айтқанда, бұл жағдайда (3) теңсіздігінің барлық шешімдерінің жиыны барлық нақты сандар жиыны болады.

 *б)* Егер  болса, онда (3) теңсіздігі  мәнінен басқа кез келген  үшін ақиқат сандық теңсіздікке айналады. Демек, бұл жағдайда (3) теңсіздігінің барлық шешімдерінің жиыны жиыны болады.

*в)* Егер болса, онда (3) теңсіздігі

  (4)

теңсіздігіне пара – пар, мұнда , .  екенін

айқын, сондықтан интервалдар әдісін қолданып, (4) теңсіздігінің барлық шешімдерінің жиыны  екенін аламыз.

  болсын. Онда (2) теңсіздігі

 (5)

теңсіздігіне пара – пар.

*а)* Егер  болса, онда кез келген саны үшін бұл теңсіздің жалған теңсіздікке айналады, сондықтан (5) теңсіздігінің шешімдері жоқ болады.

 *б)* Егер  болса, онда тағы да (5) теңсіздігінің шешімдері жоқ болады.

 *в)* Егер болса, онда (5) теңсіздігі

  (6)

теңсіздігіне пара – пар, мұнда , .  екенін айқын, сондықтан интервалдар әдісін қолданып, (6) теңсіздігінің барлық шешімдерінің жиыны интервалы екенін аламыз.

  теңсіздігін шешуде дәл осылайша жүргізіледі. Жоғарыда келтірілген талқылауларды бір жерге жиямыз (1 - кесте). Бұл таблицаны есте ұстаудың қажеті жоқ, нақтылы берілген квадраттық теңсіздікті шешу үшін әр жолы жоғарыда келтірілген талқылауларды қараған жөн.

 Мысал. теңсіздігін шешу керек. Квадраттық  үшмүшелігінің түбірлері  және  болғандықтан, . Олай болса, теңсіздік  теңсіздігіне пара – пар.

 Соңғы теңсіздікке интервалдар әдісін қолданып, берілген теңсіздіктің барлық шешімдерінің жиыны  интервалы екенін аламыз.



1 – кесте

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | Теңсіздік |  Теңсіздіктің шешімі |
|  |  |   |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |   |  | шешімдері жоқ |
|  |  |  |  |
|  |  |  | шешімдері жоқ |
|  |  |  |  |
|  |  |  | шешімдері жоқ |
|  |  |  |  |
|  |  |  | шешімдері жоқ |
|  |  |  |  |

**Мысал 1.4.1.** Мынадай теңсіздікті шешу керек

***Шешуі***: Берілген теңсіздіктің оң жақ бөлігіндегі 7 санын сол жаққа шығарайық, сонда теңсіздік мына түрге келтіріледі: . Шыққан теңсіздікті ортақ бөлімге келтірейік:

Бөлшек теріс болуы үшін алымы оң болса, бөлімі теріс болуы немесе алымы теріс болса, бөлімі оң болуы керек. Сондықтан мынадай екі жүйені шешіп, олардың бірігуін шешім түрінде аламыз:

Жүйелердің шешімдерін табайық:

Енді квадрат теңсіздікті көбейткіштер түрінде жазып алайық:

 болатындығын және теңсіздігін ескересек, жүйенің шешімі нәтижесінде мынадай болады:

Енді квадрат теңсіздікті көбейткіштер түрінде жазып алайық:

 болатындығын және теңсіздігін ескересек, жүйенің шешімі нәтижесінде мынадай болады:

Екі жүйеден табылған шешімдерінің бірігуін табамыз.

Жауабы:

**1.5 Квадраттық радикалдарға байланысты теңдеулер мен теңсіздіктер**

Теріс емес санның арифметикалық түбірінің белгісін *“”* квадраттық радикал деп те атайды  Кез келген *a* саны үшін *,* ал теріс емес *a* және *b* сандары үшін *, a=b*теңдіктері тең күштес болады

**Есеп 6**а) Евклид тепе-теңдігін   және   үшін дәлелдеңіздер



Ықшамдаңыздар

б)        в)   г) 

 ***Нұсқау***а) көрсетілген *a* және *b* сандары үшін, теңдіктердің теріс емес болатынын көрсетіп, сонан соң екі жағын да квадраттау қажет б) Евклид тепе-теңдігін  пайдалану қажет  в)-г) түбір астындағы өрнекті екі санның айырмасының квадраты түрінде жазып көрсету керек.

Келесі есептерді шығару үшін мектеп оқулықтарындағы сәйкес тақырыптарды еске түсіру қажет**

Квадрат үшмүшелікмектеп математикасында қарастырылатын негізгі функциялар болып есептеледі  Квадрат үшмүшелік   үшін мынадай тепе-теңдіктер мен формулалар пайдаланылады

*(1)  *

*(2)*

*(3),* мұндағыдискриминант*,*ал болғандаүшмүшеліктіңтүбірлері.(3) формулаларды Виет формулалары деп атайтыны белгілі**Виет формулаларын пайдаланып*,* квадрат үшмүшеліктің түбірлерін тауып жатпай-ақ тек олардыңкоэффициенттері арқылы ғанаолардың түбірлері үшін симметриялық өрнекткрі есептеуге болады, мысалы* , , ,* және тб

**Мысал 1.5.1**Мынадай *,*квадарт теңдеуінің түбірлерін таппай-ақ үшін, *n=3* болғандамәнін есептеңіз**

***Шешуі***Виет формулаларын пайдаланып, яғни болғандықтан, болады, осыдан .

Сондықтан екенін ескеріп*,*   мәндерін n=3;4;5;..., үшін есептей аламыз,сонда **

Дербес жағдайда*, *

**Есеп 7.** а) k=4;5;6 үшін мәнін есептеңіздер, мұндағы теңдеуінің түбірлері, б) теңдеуін шешпей-ақ, - сол теңдеудің түбірлері деп есептеп, жаңа квадраттық теңдеу құрыңыздар және квадраттық теңдеудің түбірі ретінде мен   болсын.

**Мысал 1.5.2****Мынатеңдеу тек бүтін түбірлерден тұратындай барлық а мәндерін табыңыздар

***Шешуі***Айталық, - берілген теңдеудің бүтін шешімдері деп есептеп,  *(3)* формулалары бойыншажәне **Анығырақ болуыүшін,деп есептейікСонда мынадай жағдайлар болуы мүмкін* ,*болады, демек*,   ,  және    ,,* сонда *,    ,*

*Жауабы –5 –1 1 5*

**Есеп 8**  Мына  теңдеу тек бүтін түбірлерден тұратындай барлық а мәндерін табыңыздар

*Нұсқау*Виет теоремасынан шығатыны: теңдеуінің түбірлері бірдей таңбалы болуы үшін мынадай және шарттардың орындалуы қажетті және жеткілікті; сонымен қатар екі түбірі де оң болуы үшін шарты орындалуы, ал екеуі де теріс болуы үшін шарты орындалуы қажет. Ал көрсетілген теңдеудің түбірлерінің таңбалары әртүрлі болуы үшін шартының орындалуы жеткілікті болады.

**Есеп 9.**    теңдеуінің түбірлері а) теріс сандар; б) оң сандар; в) таңбалары әртүрлі сандар болатындай барлық а мәндерін табыңыздар

1. **.** **ТАМАША ТЕҢСІЗДІКТЕР ЖӘНЕ ОЛАРДЫ ТҮРЛІ ТЕҢСІЗДІКТЕРДІ ДӘЛЕЛДЕУДЕ ПАЙДАЛАНУ ӘДІСТЕМЕСІ**

Математиканы тереңдетіп оқыту, мектеп оқушының жасына байланысты мүмкіншіліктері мен қажеттіліктеріне сәйкес мақсаттары бойынша да ерекшелінетін, екі кезеңнен тұрады (VII—IX сыныптар және X—XI сыныптар). Бірінші кезеңі негізінен бағдарлау кезеңі болып табылады. Бұл кезеңде оқушы пәнге деген қызығушылығын, ӛзінің осы пәнді игеру мүмкінш/н бағалай алатындай және IX сыныптың соңында әрі қарай математиканы тереңдетіп оқуды немесе жалпы білім беретін бағдарламаны саналы түрде таңдауға мүмкіндік беріледі. Математикаға деген оқушының қызығушылығы мен қабілеті жан-жақты дамытылуы тиісті. Егер қызығушылығы төмендеп кетсе немесе басқа бағытқа ауысса оған тереңдету бағдарламасынан жай бағдарламаға ауысуға мүмкіндік берілу керек. Екінші кезеңде оқушының математикаға қызығушылығың тұрақтылығы және осы пәнмен байланысты мамандықты таңдауы анықтаушы факторлар болады. Бұл кезеңдегі оқыту жоғары оқу орынына түсе алатындай, онда оқуды жалғастыруға және мамандықты игеруге мейілінше жеткілікті болатындай сапалы математикалық білімді қамтамасыз ететіндей болуы керек. Математиканы тереңдетіп оқытудың маңызын сәтті шешу көп жағдайда оқу үрдісіне байланысты. Мұғалімдерге әдістемелік нұсқау мен оқытудың ұйымдастырушылық формасын еркін таңдауына мүмкіндік жасалынады. Осы орайда теңсізідктерді шешу мен оларды дәлелдей білуге үйретудің маңызы зор. Оқушылар бағдарламаның негізгі материалдарын әлдеқайда жоғары деңгейде меңгерулері қажет. Оқу-тәрбие процесі оқушылардың талаптары мен олардың жас ерекшеліктерін ескере отырып құрылуы қажет. Мектеп бағдарламасында толық қарастырылмайтын тақырыптарға теңсідіктерді дәлелдеу тақырыбын жатқызуға болады. Теңсіздіктерді дәлелдеудің көптеген тәсілдерін есептерді шығару кезінде пайдалануға болады. Солардың негізгілерін атап өтейік:

1) Дәлелдеудің негізгі әдісі анықтаманы пайдалану тәсілі болып табылады. Бұл әдістің негізі ретінде қарастырылатын теңсіздіктің сол және оң бөліктері арасындағы айырмашылық бағаланады және оны ноль санымен салыстырылады.

2) Теңсіздіктерді дәлелдеудің келесі қолданылатын әдісі «қарсы жору» әдісі. Бұл тәсілді пайдалану барысында дәлелденетін теңсіздік жалған деп болжанады, түрлендірулер жасалады да, нәтижесінде қарама-қайшылыққа келтіріледі.

3) Теңсіздіктерді геометриялық салулар мен түсіндірулер жүргізулердің көмегімен теңсіздіктерді дәлелдеу.

4) Айқын теңсіздіктерді пайдалана отырып, теңсіздіктерді дәлелдеу.

5) Алдын ала дәлелденген теңсіздіктерді пайдалану арқылы теңсіздіктерді дәлелдеу.

Жоғарыда аталған төрт әдіс дипломдық жұмыстың бірінші тарауында келтірілді. Ал бесінші әдісті пайдалануды осы тарауда толықтай қарастыратын боламыз. Алдын ала дәлелденген теңсіздіктер ретінде Коши теңсіздігі, Бернулли теңсіздігі, Коши-Буняковский теңсіздігі, Чебышев теңсіздігі т.б. жатады.

* 1. **Оггустин Луи** **Коши жайлы қысқаша мәліметтер**

Математикада кеңінен қолданылатын көптеген тамаша теңсіздіктердің арасында ең танымалы Коши теңсіздігі. Сондықтан алғашқы тарауымызды Коши теңсіздігін қарастырудан бастаймыз. Аталған теңсіздікті ХІХ ғасырдың бірінші жартысында француз математигі Огюст Коши дәлелдеген болатын. Сол себепті дипломдық жұмысты теңсіздік атауы берілген ғалымның өмірбаянынан бастаған жөн.

Оггустин Луи Коши 1789 жылы заңгер отбасында дүниеге келген. Тарихта сол жылы «Ұлы Француз революциясы» атты оқиғалар тізбегі басталғаны белгілі. Ал Коши осындай қиын жағдайда ұлы ғалымға айналғаны шынында да оның ғылымға берілгенін дәлелдейді. Коши отбасының көршілері екі ғалым - біріншісі Пьер Саймон Лаплас атты астроном және физик, екіншісі Клод Луи Бертолле есімді химик болған. Бұл екі ғалым Джозеф Лагранжмен бірге Оггустинге, атап айтқанда, оның математикаға деген сүйіспеншілігіне елеулі әсер етті.

Бірде Лагранж Коши жайлы: «Бұл бала геометр ретінде бәрімізді алмастырады», - деп айтқан болатын. Коши беделді Пантеон орталық мектебінде алғашқы білімін алған. Аталған мектепті бітірген соң политехникалық училищеге түсіп, оны екі жылдан кейін бітіреді. Политехникалық училищеде оқып жүргенде математиканы сүйіспеншілікпен оқып, жақсы көрсеткіштермен бітіреді. Политехникалық училищеден кейін көпірлер мен жолдар мектебіне алғашқылардың бірі болып түседі.

1811-1812 жылдары Коши Париж ғылым академиясына бірнеше мақалалар тапсырды. Ал 1813 жылы Парижге көшіп, политехникалық училищеде ғылыми және оқытушылық қызметке кіріседі. Ал 1816 жылы Коши Париж ғылым академиясының мүшесі болады.

Оггустин Луи Коши 800-ден астам шығарма жазған, оның толық шығармаларының жинағы 27 томды құрайды. Оның негізгі еңбектері алгебра, геометрия және математикалық физиканың әртүрлі салаларына қатысты жазылған, сонымен қатар ол тамаша механик, инженер болған.

* 1. **Коши теңсіздігі және оны дәлелдеу әдістері**

Алгебрада теңсіздіктерді дәлелдеу геометриядағы сияқты оқушылардың ойлау, логикалық ойлау қабілетін дамытуға, теориялық материалды терең меңгеруге, берік практикалық дағдыны қалыптастыруға көмектеседі. Соңғы кезде орта мектептегі алгебраның бағдарламасында теңсіздіктерді дәлелдеуге дұрыс көңіл бөлінбей келеді. Мектеп оқулықтарында бұл мәселеге арнап есептер қарастырылмаған. Сондықтан біз теңсіздіктерді тамаша теңсіздіктер деп аталатын теңсіздікктердің көмегімен дәлелдеуге көбірек тоқталамыз.

Ең алғаш қарастыратынымыз Коши теңсіздігі.

**Лемма 1.** Көбейтіндісі 1-ге тең оң сандары берілсін. Сонда теңсіздігі ақиқат болады, ал теңдігі болғанда ғана орындалады.

Осы леммадан мынадай теорема шығады.

**Теорема 1.** Айталық**,** оң сандары берілсін. Сонда бұл сандар үшін мынадай теңсіздік орындалады: және бұл теңсіздік теңдігіне тек болған жағдайда ғана айналады.

*Дәлелдеу.* Бұл теңсіздікті дәлелдеу үшін математикалық индукцияның жалпыланған принципінің келесі нұсқасы қолданылады: Егер болатын кейбір тұжырымы келесі шарттарды қанағаттандырса:

а) бұл шексіз өспелі натурал сандар тізбегінің (барлық натурал сандарды қамтуы міндетті емес) кез келген мүшесіне тең n саны үшін ақиқат;

б) егер тұжырымы кейбір натурал n = m үшін ақиқат болса, мұндағы m ≥ 2, онда n = m − 1 үшін де ақиқат болса, тұжырымы кез келген натурал үшін ақиқат болады.

Бұл теңсіздіктің дербес жағдайы арифметикалық орта мен геометриялық орта арасындағы теңсіздік ретінде кеңінен танымал.

**Теорема 1.1.** Кез келген a, b > 0 үшін екі санның геометриялық ортасы олардың арифметикалық ортасынан аспайды:

*Дәлелдеу.* Ол толық квадратты бөлу әдісі арқылы жүзеге асырылады:

Бұл теңсіздік ақиқат болсын делік:;

«Айырманың квадраты» формуласын қолданайық:;

Теңсіздіктің екі бөлігіне де *4ab* қосайық, сонда: ;

«Қосындының квадраты» формуласын қолданайық:;

Теңсіздіктің екі жағын 4-ке бөлетін болсақ: .

Шарт бойынша *a* және *b* оң болғандықтан, теңсіздіктің екі бөлігінен де квадрат түбірін шығарамыз: Теңсіздік дәлелденді.

Коши теңсіздігінен мынадай салдар шығады:

**Теорема2.** Егер бірнеше нақты оң сандардың көбейтіндісі бірге тең болса, онда олардың қосындысы олардың санынан кем емес және ол барлық сандар сәйкес келген кезде ғана олардың санына тең болады, яғни әрқайсысы бірге тең болғанда ғана орындалады (демек, егер осы сандардың арасында кем дегенде екі өзара сәйкес келмейтін сан болса, онда барлық осы сандардың қосындысы олардың санынан қатаң үлкен болады): .

*Дәлелдеу.* Оң сандары берілсін, мұндағы натурал , , екені белгілі, онда оларға Коши теңсіздігін қолданып, мынаны аламыз: осыдан дәлелденетін қатынас шығады және ол теңдікке мына жағдайда ғана айналады, егер тек, бірақ , осыдан теорема тұжырымының екінші бөлігі шығады.

Коши теңсіздігін дәлелдеудің басқа да әдістерін қарастырайық.

Алдымен арифметикалық орта, геометриялық орта және де басқа орта мәндер жайлы түсініктер берейік.

**Анықтама:** *Арифметикалық орта дегеніміз* – көрсетілген барлық сандардың қосындысын олардың санына бөлу.

Алдымен арифметикалық ортаны

екі сан үшін табайық: (мұндағы a, b екі түрлі теріс емес сандар); үш сан үшін: *;* төрт сан үшін: ; n сан үшін: .

**Анықтама:** Берілгена1, а2, ....., аn n оң сан үшін *геометриялық* *орта деп* мынадай а оң санды айтады, ол үшін болатындай және оны мына түрде белгілейді: .

**Анықтама:** Ал a және b сандары үшін *гармониялық орта деп* мынадай с саны айтылады, ол үшін мынадай теңдік орындалатындай , мұндағы с = .

**Анықтама:** Берілгена және b сандарының  *квадраттық ортасы* деп мынадай санды атайдыс = .

Жоғарыда аталған орталардың нақты геометриялық түсіндірмесін беруге болады. Төменгі табаны AD = *a* және жоғарғы табаны ВС = *b* болатын ABCD трапециясы берілсін (1-сурет).



Сурет 1. Трапецияның орта мәндері

Сонда MN - трапецияның орта сызығы; KF – трапеция диагональдарының қиылысу нүктесі арқылы өтетін және табандарына параллель кесінді; LE – трапецияны екі ұқсас трапецияға бөлетін кесінді; TQ – трапецияны ауданы бірдей екі трапецияға бөлетін түзу кесінді.

- арифметикалық ортасы;

 - гармоникалық ортасы;

- квадраттық ортасы;

 - геометриялық ортасы.

Суреттен көрініп тұрғанындай, кесінділердің тізбегі үшін мынадай теңсіздіктер реті дұрыс болады:

**Мысал 2.2.1**. Айталық a және b теріс емес сандар болсын. Мынадай теңсіздіктің орындалатынын (\*) дәлелдейік.

*Дәлелдеу*. Теңсіздіктің оң және сол жақтарының айырмаларын табайық:

.

Нәтижесінде теріс емес сан шыққандықтан, теңсіздігі орындалады. Теңсіздіктің оң және сол жақтарының тең болатын, тек қана a = b болғанда, ал егер a≠ b болса, онда болады.

Екінші тәсіл бойынша дәлелденуі

Кез келген теріс емес *а* және *b* сандары үшін Мынадай теңсіздіктің орындалатынын дәлелдейік.

***Шешуі.*** Сандардың квадраты теріс емес сан болатындықтан, болады. Осыдан . Теңсіздіктің екі жағына да  өрнегін қосу арқылы оған тең күштес болатын мынадай теңсіздікті аламыз , сонан соң теңсіздіктің екі жағын да санына көбейтіп, қорытындысында  аламыз. Ал теңдік тек қана , яғни а=b болғанда ғана оындалады.

Осылайша, ***екі теріс емес санның*** ***арифметикалық ортасы сол екі санның геометриялық ортасынан кем болмайды.***Бұл теңсіздік француз математигіОггустин Луи Кошидің құрметіне *Коши* теңсіздігі деп аталғанын жоғарыда да атап өткенбіз.

Ал енді (\*) теңсіздігін бірнеше қосынды үшін қарастырайық.

Коши теңсіздігі төрт сан үшін мына түрде болады: .(\*\*)

*Дәлелдеу*: .

Ал енді (\*\*) теңдікке мынадай теңдік *a = b, c = d* орындалғанда ғана айналатын болады, яғни *a = b = c = d*.

Үш сан үшін Коши теңсіздігі мына түрге келеді :.

*Дәлелдеу*: , осыдан a + b + c ≥. Теңдігі тек *a = b =* *c* болғанда ғана орындалады.

Жоғарыда көрсетілген Коши теңсіздігінен мынадай салдарлар шығады:

1. Кез келген а оң саны үшін мынадай теңсіздік орындалады (\*\*\*). Егер *а* = 1 болса, онда теңсіздік теңдікке айналады. Демек, екі өзара кері сандардың қосындысы екіден кем болмайды, ал олардың теңдігі тек екі сан да бірге тең болған жағдайда орындалады.
2. Айталық, *а1, а2, …, аn* теріс емес сандар болсын, сонда мынадай теңсіздік орындалады :

.

1. Коши теңсіздігін мына түрге келтіруге болады:

*, a2 + b2 ≥ 2ab, a2 + b2 + c2 ≥ 3.*

4. Коши теңсіздігін мынадай сан жұптары үшін жазайық. Яғни Осы теңсіздіктерді қосып, нәтижесінде алатынымыз: Арифметикалық және геометриялық орталар жайлы теоремадан келесі теңсіздікті алуға болады Ал соңғы теңсіздікті ескере отырып, теңсіздікті мына түрде жаза аламыз

 Коши теңсіздігінің геометриялық мағынасын көрсетейік. Бізге тік бұрышты үшбұрыш берілсін, ал тік бұрышынан түскен h биіктігі, гипотенузаны a және b кесінділеріне бөледі. Геометрияда мынадай теңдік дәлелденген *h* = . Ал енді нені білдіреді? Бұл гипотенузаның ұзындығының жартысын береді. Геометриядан бізге тік бұрышты үшбұрыштың тік бұрышынан түсірілген медианасы гипотенузаның жартысына тең екендігі белгілі. Сонымен, Коши теңсіздігін геометриялық талдауы - гипотенузаға түсірілген медиананың ұзындығы гипотенузаға түсірілген биіктіктен кем болмайды.



Сурет2. Коши теңсіздігінің үшбұрыштағы геометриялық талдауы

*Берілген n*, яғни  *а1, а2, ....., аn* оң сандарының  *геометриялық ортасы*  деп мынадай аn = а1 а2… аn  теңдікті қанағаттандыратын *а* оң саны айтылады да оны мына түрде белгілейді: .



**2.3 Коши теңсіздігінің түрлі теңсіздіктерді дәлелдеуде және**

**математика мен физика есептерін шешуде пайдаланылуы**

Дәлелденген Коши теңсіздігін көптеген есептерге қолдануға болады.

 Мысалы:

- теңсіздіктерді дәлелдеу кезінде;

- функцияларды зерттеу мен олардың ең үлкен және ең кіші мәндерін табуға есептер шығару кезінде;

- теңдеулер мен теңдеулер жүйесін шешу кезінде;

- геометриялық есептерді шығаруда;

- қолданбалы сипаты бар есептер мен мәтіндік есептерді шешуде;
- физикалық мазмұндағы есептерді шығаруда;

- олимпиада есептерін шығару кезінде.

Коши теңсіздігін қолданудың мысалдарын қарастырайық.

**Мысал 2.3.1.** теңсіздігін дәлелдеңіздер

***Шешуі.*** Барлық қосындыларды теңсіздіктің бір жағына шығарып, ұқсас қосылғыштарды біріктірейік *.* Теңсіздіктіңсол жақ бөлігіне айырманың квадратының формуласын пайдаланайық: Сонда шыққан қосылғыштағы өрнектердің әрқайсысы теріс емес санды береді де, бұл бастапқы берілген теңсіздіктің орындалатынын білдіреді. Егер болса, теңсіздік теңдікке айналады. Теңсіздік дәлелденді.

**Мысал 2.3.2.** Берілген *a> 0, b> 0, c> 0, d> 0* сандары үшін (*a + b)(b* *+ c)(a + c) ≥8abc* теңсіздігін дәлелдеңіздер**.**

***Дәлелдеу***: жоғарыда қарастырылған арифметикалық орта мен геометриялық орталардың формулаларын b, c, d сандары үшін пайдаланайық, сонда шығатыны: Осы берілген шарттарды ескерсек, теңсіздіктің оң жағы да, сол жағы да оң сандарды береді, демек, оларды мүшелеп көбейтуге болады: . Содан (a + b)(b + c)(a + c) ≥ 8abc теңсіздігі шығады. Дәлелденді.

**Мысал 2.3.3.** Мынадай теңсіздікті дәлелдеңіздер.

***Шешуі.***  Бұл теңсіздікті Коши теңсіздігінің көмегімен дәлелдеуге болады. Берілген теңсіздіктегі екінші қосындыны екі қосынды түрінде жазып аайық та қосылғыштарды өзңмңзге ыңғайлы етіп топтастрайық:

Жақшадағы өрнекке Коши теңсіздігін қолданайық

Шыққан нәтижеге Коши теңсіздігін тағы бір рет қолданайық

Коши теңсіздігін үшінші рет қолдану арқылы теңсіздікті дәлелдедік. Берілген қатынастар тізбегінде екі оң сан үшін Коши теңсіздігі үш рет қолданылды.

**Мысал 2.3.4.** Теңдеуді шешіңіздер.

***Шешуі.*** Берілген теңдеу х ≥ 0 үшін қарастырылады да, мүмкін мәндер жиынында теңдеудің сол жағы әрқашан оң болады. Теңдеудің сол жағын мынадай етіп түрлендірейік: . Коши теңсіздігін қолдану арқылы алатынымыз .

Мұнда теңдік тек   болғанда орындалады.

Теңдеуді шешу арқылы олардың түбірлерін табайық, сонда х1 = 1, х2 = 4 болады. Табылған екі түбір де оң сандар болғандықтан, осы екеуі берілген теңдеудің ізделінді түбірлері болады.

Жауабы: х1 = 1, х2 = 4.

**Мысал 2.3.5.** Теңдеулер жүйесін шешіңіздер **х ≥ 0, у ≥ 0 .**

***Шешуі*. Берілгені бойынша** х ≥ 0, у ≥ 0 болғандықтан, бірінші теңдеудің сол жағына Коши теңсіздігін қолданайық.

.

Осыдан, жүйенің бірінші теңдеуінен шығатыны, пайдаланылған теңсіздіктен теңсіздік теңдеуге айналды. Осыдан мынадай шарта орындалатындығы x3 = 27 y3  немесе  x = 3y шығады. Осы шыққан теңдікті x = 3y  жүйенің екінші теңдеуіне қоятын болсақ, 9y2 – 3y2 + y2 = 28  немесе y2 = 4 болатыны шығады. Ал у ≥ 0 және  x = 3y ескерсек, онда y1 = 2  және x1 = 6 қорытындысы алынады.

Жауабы:  y1 = 2   және  x1 = 6.

Бұл жүйені басқа да әдіспен шығаруға болады, бірақ шығару жолы қиын және ұзақ болып кететіндіктен, шешімін табудың ең ыңғайлы әдісі –Коши теңсіздігін қолдану.

**Мысал 2.3.6.** Қосындысы 2-ге тең оң нақты *х,у,z* сандары үшін

 теңсіздікті дәлелдеңдер:

 Шешуі: Теңсіздіктің екі жағын 2-ге көбейтеміз, сонда

Теңсіздіктің оң жағының теріс екендігін дәлелдесек жеткілікті.

 немесе

Теңсіздікті 2-ге көбейтіп, сол жағына Коши теңсіздігін

қолданамыз: ,

 бұдан шығады:

 жақшаларды ашайық, сонда

дәлелдеу керегі де осы болатын.

**Мысал 2.3.7.** Тік бұрышты трапецияның сүйір бұрышы 300 және периметрі 6 см екені белгілі. Трапецияның биіктігі қандай болғанда трапеция ауданы ең үлкен мәнді қабылдайды?

***Шешуі***: Трапецияның биіктігін х см арқылы белгілейік, демек бүйір қабырғасы да х см болады, ал ВС қабырғасын y см деп белгілейік (3-сурет).



Сурет3. Трапеция

Сонда периметрін өрнектесек Р = 3х + 2y + х, осыдан 2y = 6 – 3х -х болып шығады.

Ауданын тапсақ, S = *x* = *x* = .

Ал енді ауданы ең үлкен мән қабылдауы үшін мына теңдеуді шешеміз *2 – х = х.* Теңдік тек *х = 1* болғанда ғана орындалады.

Жауабы:   Трапецияның биіктігі 1 см болғанда ғана, оның ауданы ең үлкен мәнді қабылдайды.

Коши теңсіздігін физика есептерін шешуде қолданылуын қарастырайық.

**Мысал 2.3.8**. Көлік *А* пунктінен *В* пунктіне қарай 60 км/сағ жылдамдықпен жүріп келеді. Ал *В* пунктіне жеткеннен кейін ол жылдамдығын *а* мәніне үдетті де, жолының соңына дейін осы үдемелі жылдамдықты сақтады. Сонан соң ол кері бағытта біркелкі үдемелі жылдамдықпен қозғалды. Қозғалысты қайта өзгерту арқылы 3 сағаттан соң көлік *В* пунктіне ең жақын келуі үшін, үдетілген *а* мәні қандай болу керек?

***Шешуі:*** Тек егер болғанда ғана теңдік орындалады.

Осыдан үдеуді табатын болсақ, .

Жауабы: *а* = 20 км/сағ2.

**Мысал 2.3.9**. Коньки тебуші *l*=500м қашықтықты *v* тұрақты жылдамдықпен өтті, ал сонан кейін жылдамдығын *a*=0,05м/с2 үдеумен баяулата бастады. Қозғалыс жылдамдығының қандай мәнінде коньки тебушінің қозғалыс уақыты мәре соңына дейін ең аз болады?

***Шешуі:*** Қозғалыс уақыты бұл жағдайда екі қосылғыштан тұрады: тұрақты жылдамдықпен қозғалғандағы уақыты мен мәре соңына жеткенше тұрақты баяулата қозғалу уақыты:

t= . Ал қозғалу уақыты ең аз болу үшін tmin=. болуы қосылғыштар тең болған жағдайда, яғни v=5м/с болғанда ғана орындалады.

**Мысал 2.3.10.**

Үш a, b, c санның геометриялық ортасының формуласын пайдаланып, мына сандардың геометриялық ортасын есептеңіздер 3, 9, 27.

***Шешуі:***

**Мысал 2.3.11.**

Үш a, b, c санның квадраттық ортасының формуласын пайдаланып, мына 2, 11 және 5 сандардың квадраттық ортасын есептеңіздер

***Шешуі :***.

Арифметикалық және геометриялық орталарға байланысты теңсіздікті экстремум есептерін шешуде, яғни функциялардың ең үлкен және ең кіші мәндерін табуда да қолдануға болады.

**Мысал** **2.3.12**. Егер a, b, p, q оң нақты сандар болсын және теңсіздіктері орындалса, онда мына теңсіздіктің дұрыс болатынын дәлелденіздер .

***Шешуі:*** Арифметикалық және геометриялық орталар жайлы теңсіздікті пайдаланайық, сонда , . Енді екі теңсіздікті қосып жіберсек,

. Есептің шартындағы теңсіздіктерді ескерсек, дәлелдеу қажет теңсіздікті аламыз

**Мысал 2.3.13.** 10 санын екі санның көбейтіндісі ең үлкен мән қабылдайтыындай, екі санның қосындысы түрінде жазыңыз.

***Шешуі :*** Айталық *10 = x + y* болсын. Мынадай шарттар *x>0* және *y>* *0* орындалсын. Жоғарыда қарастырылған (\*) теңсіздігін пайдалана отырып, мынадай теңсіздікті аламыз: . Яғни ху ≤ 25. Демек, х = у = 5 болғанда, ху көбейтіндісінің ең үлкен мәні 25-ке тең болады.

Жауабы: 10 = 5 + 5.

**Мысал 2.3.14.** Берілген функцияның ең кіші мәнін *х >* *0* шарты үшін есептеңіздер.

***Шешуі :***  функцияны мына түрде жазып алайық

.

Демек, функциясының х > 0 болғандағы ең кіші мәні 6-ға тең болып, ол мәнге , яғни х = 4 болғанда ғана алады.

Жауабы: функцияның ең кіші мәні 6-ға тең.

**Мысал 2.3.15.** функциясының ең кіші мәнін табыңыздар

***Шешуі :*** Функциядағы бос мүшені 4 және 1 сандарының қосындысы ретінде алып, функцияны мына түрге келтірейік

Өзара кері екі сан үшін Коши теңсіздігін пайдалансақ, сонда:

Теңсіздіктердің екі жағына да 4-ке тең бос мүшені қоссақ, –функцияның тек бір ғана болғандағы мәні шығады. Демек,

Олимпиада есептерін шығаруда Коши теңсіздігін пайдалануды қарастырайық.

**Мысал 2.3.16**. Теңдеуді шешіңіздер:

***Шешуі:***  Бұл теңдеуді шешу үшін Коши теңсіздігінің 1-салдарын пайдаланамыз (\*\*\*). Берілген теңдеудің сол жағын мына түрде жазып алайық:

, демек .

Теңдеудің оң жағын мына түрде жазып көрсетуге болады:

. Демек, .

Теңдеудің оң жағы мен сол жағы тең болғанда ғана теңсіздік теңдікке айналады. Демек тек *х = 1* болған жағдайда ғана теңдікке айналады. Тексеру арқылы *х = 1* теңдеудің шешімі болатынына көз жеткіземіз. Жауабы: х = 1.

**Мысал 2.3.17**. Ұшақ А портынан В портына жел бойымен және кері бағытта желге қарсы үшқаны белгілі, сонымен қатар желдің жылдамдығы өзгермеген. Келесі күні ұшақ рейсі сол маршрут бойынша желсіз күні жүргізілген. Екі күнде де ұшақ моторының қуаты бірдей болған деп есептеп, қай күні рейстерді орындауға уақыт аз кеткенін анықтаңыздар.

***Шешуі:***  Ұшақтың жылдамдығын *х* км/сағ, ал желдің жылдамдығын у км/сағ деп белгілейік. Алғашында ұшақтың жолына , ал екінші ретінде кетеді, мұндағы S –АВ ара қашықтығы.

 = - , ал енді екенін ескерейік.

Сонда < демек, екінші ретінде ұшақтың жолына уақыт аз кетеді.

Жауабы : жел болмаған жағдайда ұшу уақыты аз болады.

**Мысал 2.3.18. Қ**абырғасы *a* болатын квадрат формалы темірдің бір бетінен тікбұрышты параллелепипед формасындағы қорап дайындалған. Параллелепипед формасына келтіру үшін темір бетінен төрт квадрат бөлігі кесіліп алынған және шыққан фигураны кесу сызықтарының бойымен бір-бірімен қосып жалғастырған. Қораптың көлемі ең үлкен болатындай дайындалу материалдарының өлшемдері қандай болуы кректігін анықтаңыздар.

***Шешуі:***  суреттерін салайық



Сурет4. Квадраттан қорап шығару

Квадраттың қабырғасын х арқылы белгілейік. Сонда қораптың түбіндегі квадраттың қабырғасы *a* *− 2x*, ал биіктігі *х-*ке теі болады. Қораптың көлемі: немесе оны басқаша жазатын болсақ

Коши теңсіздігін пайдаланайық :

.

Осыдан . Көлемнің ең үлкен мәні x болғанда және ол

Жауабы : қорап көлемінің ең үлкен мәні .

**Мысал 2.3.19**. Он бір футбол ойыншыларының орташа жасы 28 жас. Ойын кезінде бір ойыншы ойын алаңынан шығарылды, нәтижесінде қалған ойыншылардың орташа жасы 27-ге тең болды.. Ойыннан шығарылған ойыншы қанша жаста?

***Шешуі****:* Он бір футбол ойыншыларының орташа жасын арифметикалық ортаны табу формуласы бойынша табайық, яғни формула бойынша *,* ал он футбол ойыншыларының орташа жасының формуласы .

Екі теңдеуден жүйе құрып, шешімін табатын болсақ:

, осыдан шығатыны а11 = 308 – 270 = 38.

Жауабы : Ойыннан шығарылған ойыншы 38 жаста.

**Мысал 2.3.20.** Егер мынадай *a, b, c* оң сандары және n- натурал саны үшін мынадай теңсіздік орындалатынын дәлелдеңдер:

Дәлелдеуі. Коши теңсіздігін екі рет пайдаланайық.

теңсіздік белгіленді. Теңдікке қандай мәндерде жететінін анықтау керек. мәселесін талқылайық. Жасалған бағалаулардың біріншісінде теңдік белгісі орын алатын тек мынадай жағдайда

Соңғы қатынастардың *a=b=c* шартына эквивалентті екенін көрсетейік. Шынында да, жазылған теңдік мынадай жүйеге эквивалентті.

Жүйедегі бірінші теңдеуден алғанда, , соңғы теңдіктен шығатыны болғандықтан, деген қорытынды шығады. Осыған ұқсас болатыны дәлелдеуге болады. a, b, c сандары тең болғанда жүргізілген түрлендірулердегі екінші теңсіздік те теңдікке айналатыны анық.

**2.4 Якоб Бернулли жайлы мәліметтер**

Шверцариядағы империялық еркін қала – Базель 1263 ж. əуел бастан ғылымның шоғарланған жері болды. Сонау Эразм заманының озінде-ақ университеті бар маңызды орталық болған. Базельде жəне голландияның басқа қалаларында көпес жақсылары билігімен ғылым мен өнер өркен жаяды. Базельдік ақсүйектердің бір ғасыр бұрын испандықтар жаулап алған Ангверпеннен бас сауғалап қашып келген Бернулли көпес семьясы да бар еді. Он жетінші ғасырдың соңынан қазірге дейін ағайынды Якоб пен Игонн Бернуллиден тараған еді. Бұл əулеттің əрбір ұрпағынан оқымыстылар щығып келеді. Бастапқыда Якоб дін ғылымын Иоганн мединцинаны қуады, алайда « Acta Eruditarum» журналында Лейбниц мақалаларымен танысқаннан кейін екеуі де біржола математик болуға бел байлайды. Екеуі Лейництің тұңғыш көрнекті шəкірттері болады. 1687 Якоб Базель унирверсиетінің математика кафедрасын алады. Мұнда ол 1705 ж. қайтыс болғанға дейін сабақ береді. Иоганн 1697 ж. Голландияның Гронинг қаласында профессор болады, кейін ағасы өлгеннен соң Базельге келіп оның орын басады, бұл қызметті ол аттай қырық үш жыл атқарады. Якоб Лейбницпен 1687 жылдан бастап хат жазысып тұрған. Ол Лейбницпен үнемі пікір алысып, кейде бір-бірімен қатаң бəсекелестікке де барады; ағайынды екеуі де Лейбниц еңбектеріндегі бар асылдың қадір-қасиетін ерте түсініп, ол қазынаны өз беттерінше аша түсуге ұмтылған. Олардың зерттеулерінде қазіргі дифференциалдық жəне интегралдық есептеудің элементар оқулықтарында бар көп нəрселерден басқа. Бірсыпыра жай диффеоенциалдық теңдеулерді интегралдау келтірілген. Якоб полярлық координаталарды пайдаланады. Бұрын Гюйгенс жəне басқалар қарастырған тізбекті сызықтарды – лемнискатаны (1691) жəне логарифмдік спиральды зерттейді. 1690 ж. Лейбниц бойымен дене тұрақты жылдамдыөпен түсетін қисық ретінде анықталған изохрониканы ашады, оның жартылай кубты парабола болатынын дəлелдейді, Якоб сонымен қатар, изопериметрлік фигураларыды зерттеп варнациялық есептеу мəселелерін қолға алады. Əр түрлі түрлендірулерде қайта жаңғырып отыратын қасиеті бар логарифмдік спиральды (оның эвалютасы да логарфмдік спираль болады ) тапқанда Якоб бұл қисықты өлгенде құлпытасына « өзгеріп барып, қайтадан осылай туамын » деп жазуды өсиет етіп қалдырған екен.

 Якоб Бернулли ықтималдық теория бойынша « Болжаулау өнерін»( 1713ж. жарық көрген) жазғаны жоғарыда айтылған. Мұның бірінші бөлімінде Гюйгенстің құрам ойындар трактаты түгелдей келтіріледі, болған тарауларында алмастырулар үлестірушілік туралы «Бернулли теоремасы».

 Ол үлкен сандар теоремасынның қарапайым түрі болып табылады. Паскаль үшбұрышын қарастыру барысында ол «Бернулли сандарын» тапқан.

**2.5 Бернулли теңсіздіктері**

Бернулли теңсіздігін швейцар математигі, ықтималдықтар теориясы мен математикалық талдаудың негізін салушылардың бірі Якоб Бернулли дәлелдеген.

Бернулли теңсіздіктерінің маңыздылығы олардың көрсеткіштік және дәрежелік функцияларды сызықтық функциялармен салыстыруға мүмкіндік беретіндігінде. Бернулли теңсіздіктері көрсеткіштік функцияның қасиеттерін дәлелдеуде, екінші тамаша шекті табуда пайдаланылады. Ал екінші тамаша шек көрсеткіштік функцияның туындысын есептеу үшін қолданылады.

**Теорема 1** (натурал көрсеткіштерге арналған Бернулли теңсіздігі).Кез келген***x ()***саны мен кез келген натурал***n***саны үшін мынадай теңсіздік орындалады

*Дәлелдеу*.  Дәлелдеу үшін (***n***  параметрі бойынша) толық математикалық индукция әдісін пайдаланайық

1) Алдымен ***n=1*** мәні үшін: , яғни теңсіздік орындалады.

2) ***n = k*** мәні үшін, яғни  теңсіздігі теңсіздікті ақиқат деп есептейік те, ***n=k+1*** үшін, яғни  теңсіздігі орындалатынын көрсетейік. Шынында да,

=

3) Алынған ***k*** мәні кез келген натурал сан бола алатындықтан, берілген теңсіздік барлық натурал ***n*** сандары үшін орындалатыны ақиқат болады. Айта кететіні, Бернулли теңсіздігі тек ***x = 0*** немесе ***n = 1***  мәндерін қабылдағанда ғана теңдікке айналады.

Теңсіздіктегі көрсеткіш натурал санның орнында кез келген нақты сан болған жағдайдағы Бернулли теңсіздігін дәлелсіз тұжырымдамасын көрсетейік.

**Теорема 2***(*көрсеткіштері кез келген сан болғандағы Бернулли теңсіздігі). Айталық,болсын. Сонда мынадай теңсіздіктер орындалады

 *егер 0*

 *егер*

сонымен қатар*,* теңсіздік ***x = 0*** мәнін қабылдағанда ғана теңдікке айналады.

Көрсетілген Бернулли теңсіздігін пайдалануға мысалдар қарастырайық.

**Мысал 2.5.1.** *f(x)=* функциясының ең үлкен мәнін есептеу керек.

***Шешуі:***

Функцияның анықталу облысында Бернулли теңсіздігін екі рет пайдаланатын болсақ: =1-

Осы теңсіздіктерді қосып жіберейік

f(x)=+

(екі теңсіздіктің әрқайсысында да) теңсіздік ***x =0***  мәнінде ғана теңдікке айналады. Сондықтан ***f(о) = 2*** — функцияның ең үлкен мәні болады

*Жауабы:*

Соңында бірнеше нақты сандарға арналған жалпыланған Бернулли теңсіздігін қарастырайық.

***Теорема 3****(****n****сан үшін* Бернулли теңсіздігі*).* Айталық*, —* таңбалары бірдей болатын сандар болсын*,  i=1,2,…,n .* Сонда

*Дәлелдеу*.  (математикалық индукция әдісін пайдалану арқылы).

1) Алдымен ***n = 1*** болғанда, теңсіздік ақиқат, яғни орындалады.

2) ***n = k*** мәні үшін, яғни

болғандағы теңсіздік ақиқат, яғни орындалады деп есептеп, ***n = k + 1***, яғни

 теңсіздігі ақиқат болатынын көрсетейік.

Шынында да,

=1+++ 1++ себебі +

3) Алынған ***k*** мәні кез келген натурал сан бола алатындықтан, берілген теңсіздік барлық натурал ***n*** сандары үшін орындалатындығы ақиқат болады. Ал теңсіздік егер ***n = 1*** немесе  болғанда ғана теңдікке айналады.

Дербес жағдайда,  болғанда,  алынады.

Қарастырылған Бернулли теңсіздігін пайдалануға мысалдар қарастырайық.

**Мысал 2.5.2.**Сандарды салыстырыңыздар  және  .
***Шешуі:*** 1)  (1)
2) санын классикалық Бернулли теңсіздігін пайдалана отырып 4 санымен салыстырайық.
Мынадай орындалатындығы айқын.
Сонда Бернулли теңсіздігін пайдалана отырып мынадай теңсіздікке келтіруге болады:
   (2)
Ал (1) мен (2) бойынша,   шығады.
**Мысал 2.5.3.**Сандарды салыстырыңыздар   және 5!-3!-2!.
***Шешуі:*** 1) 5!-3!-2!=112. (3)
2) .
Сонда Бернулли теңсіздігін пайдалана отырып мынадай теңсіздікті аламыз:
  ; (4)
Ал (3) пен (4) шығатыны,  5!-3!-2!.
**Мысал 2.5.5.**Сандарды салыстырыңыздар   .
***Шешуі:*** 1)
  санын классикалық Бернулли теңсіздігін пайдалана отырып 2 санымен салыстырайық.
Мына теңдік + орындалатыны анық.
Сонда Бернулли теңсіздігін пайдалана отырып мынадай теңсіздікті аламыз:
+
яғни  +;
Сонымен,   (6)
Ал (5) пен (6) шығатыны,   .
**Мысал 2.5.6.**Сандарды салыстырыңыздар .

***Шешуі:*** Бірінші бөлшекті *A* арқылы белгілеп алайық та*,*оның алымы мен бөлімін де 2 санына бөлейік. Сонан соң бөліміндегі әрбір бөлшекті, екіншіден бастап, алымы 1 болатын екі бөлшектің айырмасы ретінде көрсетейік.

*А*===2 (7)
 санын Бернулли теңсіздігін пайдалану арқылы бағалайық.
Сонда,  орындалады.
Сонда , мұндағы p .
Бернулли теңсіздігін ескере отырып:

1+200p=
Сондықтан 200p
Демек   (8)
Ал (7) мен (8) шығатыны,
  себебі бұл өзара кері екі санның қосындысы болады.
Сонымен, .

**Мысал 2.5.7.** Кез келген 13 санның ішінен

 теңсіздігі орындалатындай 2 сан табылатынын дәлелдеу керек.

***Шешуі.***

– есептің шартында берілген сандар.  болсын. аралығын теңдей 12 бөлікке бөлеміз. Онда 13 бұрыштың ішінен  орындалатындай  және  сандары табылатынын көрсету жеткілікті. Бұдан .  деп белгілеп

. Мұнда .

**Мысал 2.5.8.** Теңдеуді шешіңіздер:

***Шешуі:*** Теңдеудегі айнымалысының қолайлы мәндерінің диапазоны ретінде анықталғандықтан, ал мәндері оның түбірлері емес, онда деп есептеуге болады. Осыған байланысты

теңдеудің сол жағын бағалау үшін Бернулли теңсіздігін пайдалануға болады:

.

Демек, теңсіздігі орындалады. Егер алынған теңсіздік берілген теңдеумен салыстырылса, онда Бернулли теңсіздігі теңдеуге айналғаны анық және бұл тек *x* = 0 болғанда ғана мүмкін. Теңдеуге ауыстыру арқылы *х* = 0 теңдеуінің түбір екеніне көз жеткіземіз. Жауабы: x = 0.

**Мысал 2.5.9**. Теңдеудің бүтін шешімдерін табыңыз: . ***Шешуі:*** Әлбетте, теңдеудің теріс түбірі жоқ, ал оның түбірі. Сондықтан, келесіде біз тек бүтін оң түбірлерді іздейміз. Осы мақсатта берілген теңдеуді түрінде қайта жазамыз. түріндегі кез келген натурал n саны үшін Бернулли теңсіздігін ескере отырып, онда тең таңба тек үшін қол жеткізіледі, біз теңдігінің бірегей оң түбірі болатыны туралы қорытынды жасаймыз.Демек, берілген теңдеудің бүтін түбірлері 0 және 1.

Жауабы:.

**Мысал 2.5.10.** Кез келген үшін теңсіздігі орындалатынын дәлелдеңіздер.

***Дәлелдеу.*** Теңсіздіктің сол жағын түрлендірейік:

.

Бұдан шығатыны .

**2.6 Виктор Яковлевич** **Буняковский жайлы мәліметтер**

Виктор Яковлевич Буняковский (3 (15) желтоқсан, 1804 - 30 қараша (12 желтоқсан), 1889) - орыс математигі, педагогы, математика тарихшысы, 1864-1889 жылдары Ғылым академиясының вице-президенті міндетін атқарған. Ол сандар теориясының дамуына елеулі үлес қосқан. В.Я.Буняковский бастауыш білімін Мәскеуде әкесінің досы граф А.П.Тормасовтың үйінде алған. 1820 жылы В.Я.Буняковский графтың ұлымен бірге шетелге кеткен, онда ол негізінен математика ғылымдарын оқыған. Алдымен ол Кобургте тұрып, сонда жеке сабақтар алды, кейін Лозанна академиясында дәріс тыңдаған. Шетелде өмір сүрген соңғы екі жыл ішінде ол Парижде тұрып, Сорбоннада дәрістер тыңдаған. Лаплас, Пуассон, Фурье, Коши, Ампер, Лежандр және басқа да атақты ғалымдармен бірге оқуға мүмкіндік алған. Буняковский ең алдымен Кошимен жұмыс істеген. 1824 жылы Буняковский бакалавр және лицензия дәрежесін алды; 1825 жылы 19 мамырда ол аналитикалық механика және математикалық физика бойынша екі жұмыстан тұратын кандидаттық диссертациясын қорғап, Париж университетінде математика ғылымының докторы дәрежесін алды. Жалпы жеті жыл шетелде болғаннан кейін Буняковский 1826 жылы Петербургке келіп, ұстаздық қызметпен айналысады. 1828 жылы Буняковскийді Ғылым академиясы таза математика бойынша адъюнкт, 1830 жылы – төтенше академик, 1836 жылы – қарапайым академик етіп сайланған. 1864 жылы Ғылым академиясының вице-президенті болып сайланды. Буняковский академик бола отырып, физика-математика кафедрасының мәжілістерінде үнемі рефераттар жасап отырды. Өлімінен бірнеше ай бұрын, өзін-өзі сезініп, денсаулығына байланысты, академияның жұмысына белсенді қатыса алмаған Буняковский оны вице-президент лауазымынан босату туралы өтінішпен жүгінуге мәжбүр болған. Академия Буняковскийдің қызметінен кеткеннен кейін оны құрметті вице-президент етіп сайлады. Буняковскийдің ғылыми еңбегін замандастары жоғары бағалады. Ол барлық Ресей университеттерінің құрметті мүшесі болды: Мәскеу (1858), Санкт-Петербург (1860), Қазан (1875), Харьков (1875), Киев (1876), Новороссийск (1878), көптеген шетелдік және ресейлік ғылыми қоғамдар. Буняковский еуропалық ғалымдар арасында лайықты беделге ие болды. Қоғамның жанашырлығы және оның ғылыми еңбегі үшін Буняковскийге деген алғысы әсіресе 1875 және 1878 жылдары Буняковскийдің Париж университетінде математика ғылымының докторы дәрежесін алуының елу жылдығына және елу жылдығына орай мерейтойы ғылыми академиялық қызметінің мерейтойы атап өтілген кезде анық байқалды..

**2.7 Коши-Буняковский теңсіздігі**

Коши-Буняковский теңсіздігі норманы евклид кеңістігіндегі векторлардың скаляр көбейтіндісіне жатқызады. Мектептегі математика курсында да кездеседі.

**Теорема 1.**

Кез келген нақты сандар үшін , (n – 1-ден үлкен кез келген натурал сан) келесі теңсіздік орындалады:

немесе, Коши-Буняковский теңсіздігі деп аталады, ал
 теңдігі мына шарт орындалғанда ғана орын алады: .

*Дәлелдеу*. болсын және 1 теореманың бекітулері анық ақиқат.

Енді сандарының ең болмағанда біреуі 0-ден өзгеше болсын.

Содан кейін келесі белгілерді енгіземіз: , , ,бұлтүріндегі теңсіздіктіжазуғамүмкіндікбереді. Әлбетте, теңсіздік -ге тең болады, оның сол жағы үшмүшесінің дискриминантымен белгіленеді, бұл , X ∈ R көмекші функциясын қарастыруға мүмкіндік береді., яғни үшін кез келген осы квадраттық функцияның мәні (оң коэффициенті бар ) теріс емес, бұл үшмүшенің дискриминанты o-ден кіші немесе тең, бұл дегенді білдіреді, басқаша айтқанда, кез келген нақты сандар үшін Коши-Буняковский теңсіздігі орындалады: және алынған қатынастағы теңдік дискриминант 0 болғандағана, яғни f (x) функциясының графигі Ox осіне тигенде ғана орындалады, демек теңдеуінің бір түбірі бар, яғни болғанда келесі теңдеулер жүйесі үйлесімді болады: .Теорема дәлелденді .

Коши-Буняковский теңсіздігінен шығатын салдар:

1);

2).

Бұл қорытындылар айнымалылардың кез келген саны үшін жарамды. Коши және Коши-Буняковский теңсіздіктері ең алдымен әртүрлі теңсіздіктерді дәлелдеу үшін қолданылады, бірақ оларды қолдану қажеттілігі әрқашан анық көрінбейді. Сондай-ақ бұл теңсіздік мектеп бағдарламасында кездеседі. Мысалы, жазықтықтағы векторлар арасындағы бұрыштың косинусын табу формуласы:

;

Оң жақ теңдік – бұл белгілі бір бұрыштың косинусы, егер ол модуль бойынша 1-ден аспаса және бұл екі айнымалы үшін Коши-Буняковскийдің теңсіздігі болса:

,

және векторлар арасындағы бұрыш 0º немесе 180º болғанда ғана, яғни векторлар коллинеар болғанда ғана теңдік мүмкін болатыны анық.

**2.8 Коши-Буняковский теңсіздігін қолдану**

Коши-Буняковский теңсіздігі дәлелдеуде, геометриялық есептерді шешуде, тригонометриялық теңдеулерді шешуде, сонымен қатар функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табуда қолданылады.

 а) дәлелдеулерде:

**Мысал 2.8.1.** Кез келген a,b,c нақты сандары үшін теңсіздігі ақиқат болатынын дәлелдеңдер [18, 69 б.].

*Дәлелдеу.* Теңсіздікті келесі түрде жазамыз:

, сондықтан бұл анық ақиқат теңсіздік, өйткені бұл Коши-Буняковский теңсіздігінің ерекше жағдайы.

**Мысал 2.8.2**. Кез келген үш нақты сандар үшін егер болса, онда теңсіздігі ақиқат болатынын дәлелдеңдер [25, 27 б.].

*Дәлелдеу*. Коши-Буняковский теңсіздігі мына теңсіздікті береді:

 ,

Яғни , бірақ шарты бойынша, онда , демек, .

б) геометриялық есептерді шығарғанда:

**Мысал 2.8.3**. Мынадай функцияның ең үлкен мәнін есептеңіздер

*Шешуі.* Алдымен функцияның (AO) анықталу облысын тауып алайық*:*

Мынадай векторларды қарастырайық: Екі вектордың скаляр көбейтіндісін табайық:

Векторлардың ұзындықтарын табатын болсақ:

;

Коши-Буняковский теңсіздігі бойынша болғандықтан,

.

Енді қандай да бір мәні үшін берілген функция 41-ге тең мәні болатынына көз жеткізейік. Ол үшін аралығында теңдеуінің шешімі бола ма, соны тексеру қажет. Сонымен қатар, басқаша да жасауға болады, яғни айнымалының қандай мәнінде векторлары бірдей бағытталғандығын анықтау қажет. Ол мынадай теңдік дұрыс болғанда орындалады:

Осыдан пропорция қасиеті бойынша

Демек функцияның ең үлкен мәні

Жауабы: функцияның ең үлкен мәні

**Мысал 2.8.4**. Тік бұрышты параллелепипедтің көлемін анықтаңыз, егер оныңөлшемдері қатынасын қанағаттандырса, ал диагоналы -ке тең болса.

*Шешуі*. Тік бұрышты параллелепипед үшін .

 болғандықтан, .

Коши-Буняковский теңсіздігін қолдансақ, онда

Есептің шарты бойынша болғандықтан, жоғарыда қолданылған Коши-Буняковский теңсіздігі теңдікке айналады, сондықтан теңдіктер тізбегі орындалады. Осыдан аламыз. Бұл жағдайда теңдігінен немесе болатыны шығады. Демек, және параллелепипедтің көлемі болады.

Жауабы : 7680.

в) тригонометриялық теңдеулерді шешу кезінде:

1-есеп. теңдеуін шешіңіз.

Шешім. Берілген теңдеу тең. Ары қарай, екі бұрыштың синусы арасындағы айырмашылық формуласын қолданып, мына теңдеуді аламыз:

 немесе .(1)

Коши-Буняковский теңсіздігін (1) теңдеудің сол жағына қолданамыз, содан кейін . Осыдан , яғни болатыны шығады, сондықтан теңдеудің түбірі жоқ.

Жауабы: түбірлері жоқ

г) функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін тапқанда:

**Мысал 2.8.5**. болсын. функциясының ең кіші мәнін табыңыз.

Шешім. Коши-Буняковский теңсіздігін қолданайық, содан кейін

Демек , мәнін аламыз.

Енді көрсетейік. Коши-Буняковский теңсіздігі болған жағдайда ғана теңдігіне айналатыны белгілі, бұдан былай шығатыны белгілі..

Себебі , онда .

Бұл жағдайда:

Жауабы:

**Мысал 2.8.6**

 оң сандары үшін мына теңсіздіктің

 

орындалатынын дәлелеудеу керек.

**Шешуі.**  және  болатындай  және  кесінділерін қарастырамыз.



Мұнда



болатынын көруге болады. Онда кез келген үшбұрыш үшін  орындалатынын ескерсек, онда берілген



теңсіздігінің орындалатынын аңғару қиын емес.

**Мысал 2.8.7.** Сүйір бұрышты АВС үшбұрышының АВ және АС қабырғаларының орталарын сәйкесінше М және N деп белгілейік. Олай болса, ВС қабырғасынан алынған кез-келген S нүктесі үшін  болатынын дәлелдеңдер.

Егер S нүктесі ВС қабырғасының ортасы болса,

Егер S болса, <МДВ< <МДS, сондықтан МВ<МS

МВ-МS<0 <NCS< <NSC болғандықтан NS<NC NC-NS>0

Егер S болса, керісінше болады.

**C**

*a*

*b*

*a*

*a*

S

**D**

**M**

**B**

**А**

*b*

Сурет 5. Үшбұрыштағы теңсіздікті дәлелдеу

**Мысал 2.8.8.**

 теңсіздігін дәлелдеу керек.

**Шешуі.** Егер  немесе  болса, онда теңсіздік орындалатыны айқын.  және  жағдайларын қарастырайық. Мұндай -лар үшін  болатын АВСD дельтоидын құруға болады.



Сурет 6. АВСD дельтоиды

Онда



Коши-Буняковский теңсіздігін үшбұрыштардың элементтері арасындағы түрлі теңсіздіктерді дәлелдеу үшін қолдануға болады. Ол үшін мынадай белгілеуер қолданылады: Үшбұрыштың қабрығалары *a, b, c* ретінде, бұрыштары ретінде, ал үшбұрышқа іштей және сырттай сызылған шеңберлердің радиустар сәйкесінше *r, R*, ал медианалары , биіктіктері арқылы белгіленсін.

**Мысал 2.8.9**. Теңсіздікті дәлелдеу керек: .

*Дәлелдеуі.* Коши-Буняковский теңсіздігін және мынадай тепе-теңдікті: , теңсіздіктерін, теңсіздігін, теңсіздігін, теңдіктерін қолданайық, сонда

Теңсіздік теңдікке тек үшбұрыш тең қабырғалы болғанда ғана орындалады.

Демек, .

**Мысал 2.8.10.** Теңсіздікті дәлелдеу керек:

Дәлелдеуі.

Теңсіздік теңдікке тек үшбұрыш тең қабырғалы болғанда ғана орындалады.

**Мысал 2.8.11.** Қабырғада биіктігі *АВ*-ға тең сурет ілініп тұр. Бақылаушы қабырғадан қандай қашықтықта тұрғанда оның плакатты көру *Ө* бұрышы ең үлкен болады?



Сурет 7. Көру бұрышын айқындау

***Шешуі:*** Бақылаушының көзімен оны О нүктесімен белгілейміз. Қабырғаны қосатын горизанталь түзудің қабырғамен қиылысуын К нуктесі арқылы белгілейік (7-сурет)

Сонда ізделінді ара қашықтық ОК болады, оны *x*-деп белгілейміз.

*КА=a,KB=b*

tg=.

tgtg=

Сонда tg

*tg* функциясы өспелі функция болғандықтан *tg е*ң үлкен мәніне Сондақтан біздің есептің шешімі бөлшегінің ең үлкен мәнін табуға келеді.

Бөлшектің алымы: *b-a* - const яғни,оның бөлімінің -ең аз мәнінде бөлшек ең үлкен мәніне ие болады. Алдыңғы есептің тұжырымы бойынша қосындысы ең кіші мәнге болғанда ие болады. Сонымен, ізделінді ара қашықтық - -ға тең.

**Мысал 2.8.12.** Теңдеуді шешіңіздер

Мынадай теңсіздік орындалатыны белгілі . Бұл Коши-Буняковский теңсіздігінің *n=2* болғандағы дербес жағдайын береді.

Егер векторлары коллинеар болса, онда теңдігі орындалады.

Берілген теңдеуді мына түрге өзгертейік

 немесе

 немесе

Демек, векторлар коллинеар, яғни мына шарт орындалады.

Сонда

Сонда

Онан кейін белгілеуімен алмастырып, теңдеуді мына түрге келтіріп аламыз

Соңғы теңдеудің түбірлері

Сол себепті

Жауабы:

Оқушыны белсенді тұлға ретінде дайындауда білім беру процесіне қатысушыларға көптеген факторлар маңызды әсер етеді. Ондай факторларға мұғалімнің рөлі, сабақ беру әдістері, сонымен қатар оқушының өзін-өзі жаттықтыруы мен өзін-өзі дайындауға шешім қабылдауын жатқызуға болады.

Жоғарыда қарастырылған соңғы екі мысалдарға ұқсас ұсынылатын тапсырмалар жүйесі арқылы оқушылардың білімдері толықтырылады, кеңейтіледі және жүйеленеді. Үшбұрыштар элементтері арасындағы тәуелділіктер мысалдары арқылы геометриялық есептерді аналитикалық жолмен шешудегі олардың практикалық тәжірибесі бола алады, сонымен қатар геометриялық теңсіздіктер, алгебра мен геометрия арасындағы байланысты қадағалауға мүмкіндік береді әрі оқушылардың интеллектуалдық дағдыларын дамытады.

**2.9 Пафнутий Львович Чебышев**

Пафнутий Чебышев 1821 жылы 4 (16) мамырда Калуга губерниясының Боровский ауданы, Окатово селосында (қазіргі Калуга облысы Жуковский ауданы, Акатово селосы) бай помещик, ескі орыс өкілінің отбасында дүниеге келген. Ол өзінің алғашқы тәрбиесі мен білімін үйде алған: анасы Аграфена Ивановна оған сауаттылыққа, арифметикаға және ал француз тілін немере апасы Авдотя Квинтиляновна Сухарева үйреткен. 1832 жылы Чебышевтер отбасы Москваға көшкен. 1837 жылдың жазында П.Л.Чебышев Москва университетінде философия факультетінің екінші физика-математика бөліміне математикадан оқи бастады. 1840-1841 оқу жылында студенттер байқауына қатысып, П.Л.Чебышев n-дәрежелі теңдеудің түбірін табудағы еңбегі үшін күміс медаль алады (жұмыстың өзі 1838 жылы Ньютон алгоритмі негізінде жазылған). 1841 жылы Пафнутий Чебышев Москва императорлық университетін бітірген. 1847 жылы Чебышев Санкт-Петербург университетінің адъюнкт-профессоры болып бекітілді. Университетте лекция оқу құқығын алу үшін ол «Логарифмдерді қолдану арқылы интегралдау туралы» тақырыбында тағы бір диссертация қорғап, одан кейін Жоғары алгебра, Сандар теориясы, Геометрия, Эллиптикалық функциялар теориясы және Практикалық механика курстары бойынша дәріс оқыған. Ықтималдық теориясы курсын оқу барысында, одан анық емес тұжырымдар мен заңсыз мәліметтерді алып тастап, оны қатаң математикалық пәнге айналдырды. 1849 жылы П.Л.Чебышев Петербург университетінде «Салыстыру теориясы» атты докторлық диссертациясын қорғап, 1850 жылы Петербург университетінің профессоры атағын алды және бұл бұл қызметті 1882 жылға дейін атқарды. П.Л.Чебышевтің негізгі математикалық зерттеулерді Сандар теориясы, Ықтималдықтар теориясы, Функциялардың жуықтау теориясы, Математикалық талдау, Геометрия, Қолданбалы математикаға байланысты жүргізді. 1851 жылы оның «Берілген мәннен аспайтын жай сандарды анықтау туралы» атты атақты мемуары басылып шықты. Осы еңбегінде П.Л.Чебышев жуықтауды интегралдық логарифмарқылы жасау әдісін ұсынды. Аталған мемуар 30 жастағы . П.Л.Чебышевке бүкілеуропалық атақ әкелді. Онан кейін 1852 жылы П.Л.Чебышев «Жай сандар туралы» атты жаңа мақаласын жариялады. Онда ол жай сандарға байланысты қатарлардың жинақталуына терең талдау жасады, олардың жинақтылық критерийін тапты. Осы нәтижелерді қолдану ретінде ол алдымен «Бертран постулатын» дәлелдеді.

П.Л.Чебышев қырық жыл бойы әскери артиллерия кафедрасының жұмысына белсене араласты (1855 жылдан - Әскери-ғылыми комитеттің артиллерия бөлімінің толық мүшесі, 1859 жылдан - Уақытша артиллерия комитетінің толық мүшесі) және оны жетілдіру бойынша жұмыс істеді. Ықтималдық теориясының тәжірибелік атыс әдістерінің нәтижелерін өңдеу үшін қолданатын артиллериялық атыстың қашықтығы мен дәлдігін есептеудің теориялық негіздерін жасады. Баллистика курстарында снарядтың лақтыру бұрышына, бастапқы жылдамдығына және берілген бастапқы жылдамдықтағы ауаның кедергісіне байланысты ұшу қашықтығын есептеу үшін Чебышев формуласы бүгінгі күнге дейін пайдаланылады. П.Л.Чебышев өз еңбектерімен орыс артиллерия ғылымының дамуына, артиллерист ғалымдарды математикамен таныстыруға зор улес қосты.

Механика саласында П.Л.Чебышев қолданбалы механика сұрақтарына, атап айтқанда, механизмдер теориясын жандадыруда зор үлес қосты, осы бағытта ғалымның 15-ке жуық еңбегі бар. Ол теориялық механиканың жалпы мәселелеріне арналған бірде-бір еңбек жарияламады, дегенмен шәкірттерінің теориялық механика саласына қатысты бірқатар еңбектерінде (П. И. Сомов, А. М. Ляпунов, Д. А. Грейв), ұстазы ұсынған ой-пікірлер пайдаланылды. Шын мәнінде, П.Л.Чебышев М.В.Остроградский қайтыс болғаннан кейін орыс механика мектебінің Санкт-Петербургтегі филиалын басқарды.

1876 ​​жылы Филадельфияда өткен Дүниежүзілік көрмеде Чебышев құрастырған конструктивтік жағынан бірқатар артықшылықтары бар бу машинасы қойылды. Чебышев жасаған механизмдердің ішінде жануардың жүру кезіндегі қозғалысына еліктейтін «аяқпен жүретін машина» елеулі орын алады. Бұл машина 1878 жылы Парижде өткен Дүниежүзілік көрмеде сәтті көрсетілді және қазіргі уақытта Мәскеу политехникалық мұражайында сақталып тұр. П.Л.Чебышев құрастырған мүгедектер арбасының үлгісі – скутер креслосы 1893 жылы Чикагода өткен Дүниежүзілік көрмеде және ол ойлап тапқан және алғашқы үздіксіз арифмометрге айналған автоматты қосу машинасы көрсетілді және ол Париж өнер және қолөнер мұражайында сақтаулы тұр. Чикаго көрмесінде мотороллер креслосымен қатар П.Л.Чебышев ойлап тапқан сұрыптау машинасы (астықты салмағы бойынша сұрыптау механизмі) және айналуды қозғалыстың басқа түрлеріне түрлендірудің жеті механизмі көрсетілді.

П.Л.Чебышев Әулие Александр Невский, ІІ дәрежелі Әулие Владимир, І дәрежелі Әулие Анна, І дәрежелі Әулие Станислав ордендерімен марапатталған. 1890 жылы ол Францияның Құрмет легионының орденімен де марапатталған.

**2.10 Чебышев теңсіздігі және оны пайдалану**

Орташа қуат мәндерін және олардың арасындағы қатынастарды зерттей отырып, тиісті теңсіздіктерге кіретін айнымалыларға қатысты талаптар қойылмады. Алайда, мұндай қосымша шектеулерді ескере отырып, әртүрлі жаңа қатынастар пайда болды. Мұндай қатынастардың мысалы ретінде Пафнутый Львович Чебышев атындағы тамаша теңсіздікті келтіруге болады.

Оң сандардан тұратын екі тізбек берілсін: және . Егер барлық *k,m* номерлері үшін теңсіздігі орындалса, онда екі тізбек бірдей реттелген деп аталады, және болса, онда екі тізбек кері реттелген деп аталады.

Тізбектер үшін мынадай тұжырым дұрыс болады: егер және - бірдей реттелген оң сандардың тізбектері болса, және – салмақтар тізбегі болса,онда мынадай теңсіздік орындалады:

Ал кері реттелген тізбектер үшін мына теңсіздік орындалады:

**Теорема 1.** Кез келген кемімейтін (немесе өспейтін) және тізбегі үшін келесі теңсіздік орындалады:

 Бұл теңсіздік Чебышев теңсіздігі деп аталады.

*Дәлелдеу.* Чебышев теңсіздігіне эквивалентті теңсіздікті қарастырайық:

Оның сол және оң жақ бөліктерінің айырмасын құрастырып, содан кейін түрлендірейік:

Дегенмен, туындылардың әрқайсысы: мұндағы теріс емес, өйткені шарт бойынша және тізбегіне бір уақытта кемімейді, не бірмезгілде өспейді (монотонды), бұлЧебышев-эквивалентті теңсіздіктің сол және оң бөліктерінің айырмасының теріс еместігін дәлелдейді. Теорема дәлелденді.

**Теорема 2.** және , мұндағы нақты сандардың бірдей реттелген тізбегі және оң сандары болсын, болғанда, онда келесі теңсіздік орындалады:

оның үстіне бұл қатынас егер тек , немесе болғанда ғана теңдік нұсқасында жүзеге асырылады.

**Теорема 3**. Кез келген нақты және үшін кез келген нақты оң сандар мен , () , және тізбегі бір монотонды болғанда (атап айтқанда, және болса), келесі теңсіздік орындалады:

.

Чебышев теңсіздігін қолдануға мысалдар қарастырайық**.**

Чебышев теңсіздігі олардың арасындағы қатынастың орташа қуат мәндерін байланыстырады. Ол теңсіздіктерді дәлелдеуде кеңінен қолданылады.

а) теңсіздіктерді дәлелдеу кезінде:

**Мысал 2.10.1**. кез келген нақты оң сандар үшін теңсіздігі дұрыс екенін дәлелдеңіз.

Дәлелдеу. келесі теңсіздіктер орындалады:

**Мысал 2.10.2**. кез келген нақты оң сандар үшін
 теңсіздігі дұрыс екенін дәлелдеңіз.

Дәлелдеу

бірақ келесі теңсіздік орындалады, демек, .

**Мысал 2.10.3.** Үшбұрыштың тік бұрышынан жүргізілген биссектрисасы сол төбеден жүргізілген медиана мен биіктік арасындағы бұрышты екіге бөлетінін дәлелдеңдер.

***Дәлелдеу.*** ABC тікбұрышты үшбұрышын қарастырайық (8-суретті қараңыз).



Сурет 8. Тікбұрышты үшбұрыштағы байланыстар

Тік бұрыштың тік бұрышын құрайтын төбесінен жүргізілген осы үшбұрыштың биіктігін CH, биссектрисасын CL, ал медианасын CM арқылы бегілейік. Аталған элементтердің ұзындығы коэффициентті дәлдігі бойынша, -2, -1, 2 ретті үшбұрыштың катеттерінің орташа дәрежелі ұзындықтарының мәндерімен өрнектеледі. AC = *b*, BC = *a* деп есептесек, онда , .

Үшбұрыштың биссектрисасының қасиетіне байланысты қарама-қарсы қабырғасын көрші қабырғаларына пропорционал кесінділерге бөлетіндігін көрсету үшін мынадай қатынастың дұрыстығын тексеру жеткілікті.

(\*)

*HL* және *LM*-ді *a* және *b* арқылы өрнектейміз. *CH* биіктігінің белгілі қасиетіне байланысты бізде

Сонымен қатар, қатынасынан екендігі шығады.

Демек,

Енді *LM* ұзындығын өрнектейтін болсақ:

Сонымен, (\*) теңдігінің сол жағы келесі түрде өрнектеледі:

Енді теңдеудің оң жағын түрлендірейік:

қатынасы орнатылды, яғни есеп шығарылды.

**Мысал 2.10.4*.***Теңсіздікті дәлелдеңдеу керек: (*х,у*>0)

*Дәлелдеу.*

Екі жағын квадраттаймыз, сонда



Сол жаққа жинап ортақ бөлімге келтіреміз, сонда





Дәлелдеу керегі осы болатын.

**Мысал 2.10.5**. АВСД трапециясының диагоналдары О нүктесінде *АО:ОС=3:1* қатынасында қиылысады және *АОД* үшбұрышының ауданы 36-ға тең. Трапецияныңауданын табыңыз.

**1zh**

**1zh**

**3x**

**x**

**1zh**

**O**

**С**

**B**

**D**

**F**

**N**

**K**

**A**

**M**

**h**

**3zh**

**E**

 Сурет 9. Трапеция ауданын табу есебі

***Шешуі***: S∆AOD=36

SMBCA=SBCED=1z∙h S∆CDE=    SBCD=16 SABC=16



Сонымен Sтр=36+16+16-4=64. ∆AOD~∆BOC

**2.11 Иоган Виллем Людвиг Вальдемар Йенсен**

Иоганн Йенсен – Данияның көрнекті математигі және инженері болған. Йенсен 1859 жылы 8 мамырда Данияның Наксков қаласында дүниеге келген, бірақ балалық шағының көп бөлігін әкесі сонда жұмысқа орналасуына байланыст Швецияның солтүстігінде өткізген. Кейін Данияға қайтып келген. 1876 жылы Йенсен Копенгаген технологиялық колледжіне оқуға түседі. Аталған колледжде Йенсен математика пәнін жақсы оқыған және алғашқы математикалық мақаласын сол колледжде оқып жүргенде жазған. Бірақ Йенсен математиканы негізінен өзінің табандылығы мен оқуға деген ынтасының арқасында үйренген және оның ешқашандай академиялық лауазымдары болмаған. 1881-1924 жылдар аралығында Йенсен Копенгаген телефон компаниясында жұмыс істеп, 1890 жылы техникалық бөлімнің бастығы қызметіне көтерілген және бос уақытында математика мен өз бетінше айналысуын жалғастырған.

Иоганн Йенсен өзі дәлелдеген белгілі теңсіздіктің арқасында Данияның көрнекті әрі танымал математигі бола білген. Иоганн Йенсен 1915 жылы Йенсен формуласын комплекстік анализ бойынша дәлелдеген.

1862 жыл мен 1903 жылдар аралығында Данияның Математикалық қоғамының президенті болған.

**2.12 Йенсен теңсіздігі және оны қолдану**

**Теорема (**Йенсен теңсіздігі). Айталық, - теріс емес нақты сандар, және болсын. Сонда кез келген төмен қарайғы дөңес функциясы мен кез келген айнымалылары үшін келесі теңсіздік орындалады:

*.*

Осы теңсіздікті пайдалану мысалдарын қарастырайық.

**Мысал 2.12.1**. Мынадай - оң нақты сандар, және болсын. Мына теңсіздікті дәлелдеңіздер: .

***Шешуі.*** Теңсіздікті аздап өзгерту арқылы (яғни, оның екі бөлігінен де 4-ті азайтқанда), оған эквивалентті теңсіздікті аламыз:

.

Мынадай (0, 1) аралықта берілген функциясын

қарастырайық. Екінші туындысын табамыз да, оны зерттеу нәтижесінде функцияның төмен қарайғы дөңес функция болатындығына көз жеткізе аламыз, яғни - сандары үшін Йенсен теңсіздігін жаза аламыз.

 ал енді болады, ал функциясы (0, 1) аралығында минималды нүктесіне мәнінде жетеді.

Ескере кететіні: бастапқы теңсіздікті ғана тең салмақтар үшін қарастырғанда, функциясының иілу нүктесімен жұмыс істеуге тура келеді. Бұл тәсілмен де есепті шығаруға болады, бірақ бұл жағдайда нүктелерді дөңес функцияның жекелеген интервалдары бойымен жылжытып, бірнеше интервалдар бойынша жеке-жеке қарастырып отыру қажет болады, сонымен қатар олардың әрқайсысында жеке бір айнымалыға тәуелді теңсіздіктерді шешіп отыру қажет болады.

Жоғарыда қарастырылған есепте : 𝑎, 𝑏, 𝑐, 𝑑 сандарына байланысты өрнектерде кейбіреулерін салмақ ретінде қарастыру ыңғайлы болды, ал қалғандарын 𝑓(𝑡) функциясындағы мәні бойынша есептелгендіктен, иілу нүктелері болмайтындай функцияға келтіріліп, бұл функцияға Йенсен теңсіздігі пайдаланылды.

**Мысал 2.12.2**. Қабырғалары AB = *a* болатын ABCD тіктөртбұрышы берілген; BC = *b*. ABCD тіктөртбұрышының сыртынан тағы тіктөртбұрыштар сызылған. Сол сызылған тіктөртбұрыштардың әрқайсысының бір қабырғасы ABCD тіктөртбұрышының бір төбесінен өтетіндей болсын. Сырттай сызылған тіктөртбұрыштың ауданы ең үлкен болатындай тіктөртбұрышты анықтап, осы ауданды табыңыз.

***Шешуі.*** Берілген тіктөртбұрыштың қабырғаларының ұзындықтары *a* және *b* болсын (10-сурет), ал берілген тіктөртбұрышқа сырттай тағы бір тіктөртбұрыш сызылғанжәне сызылған тіктөртбұрыштардың сәйкес қабырғаларының арасындағы бұрышы болсын.



 Сурет 10

Сонда сырттай сызылған тіктөртбұрыштың қабырғаларының ұзындықтары

ал оның ауданы

.

Мұндағы айнымалы болып тұрған көбейтіндісі. Осы көбейтіндінің максималды мәнін табуымыз керек.Тригонометрияның негізігі формуласы *sin²a + cos²a = 1*- екендігінен, шығады. Сонда

Шыққан теңсіздік теңдікке болғанда ғана айналады. та бар (өйткені, шартқа сәйкес, )

Демек, сырттай сызылған тіктөртбұрыштың ауданы ең үлкен болуы үшін, оның қабырғалары берілген тіктөртбұрыштың қабырғаларымен 45° бұрыш жасайды. Бұл тіктөртбұрыштың шаршы болатындығы көрініп тұр, ал оның ауданын табатын болсақ .

**Жауабы**: Ауданы болатын шаршы.

**Мысал 2.12.3**. Мынадай - үшбұрыштың қабырғалары үшін төмендегі теңсіздік орындалатынын дәлелдеңіздер

***Шешуі.***  төмен қарайғы дөңес функцияны қарастырайық. Үшбұрыштың нүктелерін мынадай деп есептейікғ ал салмақтары мына түрде болсын: және Йенсен теңсіздігін қолданайық, және екендігі белгілі. Сонда

*,* осыдан

немесе

.

**Мысал 2.12.4**. қандай да бір көпбұрыштың қабырғалары, ал P - оның периметрі болсын.Мынадай теңсіздіктің орындалатынын дәлелдеңіздер:

***Шешуі.*** төмен қарайғы дөңес функцияны (0, +∞) аралығында қарастырайық. Сонда, деп есептеп, онан кейін Йенсен теңсіздігін қолданайық, сонда

,

осыдан

Соңғы алмастыру мүмкін, өйткені . Ал барлық - оң мәндер қабылдайды, себебі көпбұрыш теңсіздігіне байланысты.

**Қорытынды**

Мектепте математиканы оқытудың негізгі міндеттері – қазіргі қоғам мүшесіне күнделікті өмірде және еңбек ету барысында, сыбайлас пәндерді оқуда және оқуды одан әрі жалғастыруда қажетті болатын жүйелі математикалық білімдер мен біліктіліктердің саналы және сапалы түрде игерілуін қамтамасыз ету. Осы негізгі міндеттерімен, қатар математиканы тереңдетіп оқыту, оқушының пәнге деген қызығушылығының тұрақты болуын, математикалық қабілетті анықтауды және оны дамытуды, математикамен байланысты кәсіби бағдар беруді, жоғары оқу орынында оқуға дайындықты қамтамасыз етеді. Математикада теңсіздіктерді тереңдетіп оқыту, мектеп оқушыларының жасына байланысты мүмкіншіліктері мен қажеттіліктеріне сәйкес мақсаттары бойынша да ерекшелінетін, екі кезеңнен тұрады (VII—IX сыныптар және X—XI сыныптар). Бірінші кезеңде оқушының сандақ теңсіздіктер, сызыұтық теңсіздіктер, квадраттық теңсіздіктер тақырыптарына деген қызығушылығын, өзінің осы пәнді игеру мүмкіншілігін бағалай алатындай және IX сыныптың соңында әрі қарай теңсіздіктер тақырыбын тереңдетіп оқу қарастырылады. Математика пәніндегі теңсіздіктер тақырыбына деген оқушының қызығушылығы мен қабілеті жан жақты дамытылуы тиісті. Екінші кезеңде теңсіздіктер тақырыбы бойынша оқушының математикаға қызығушылығының тұрақтылығы және осы пәнге байланысты қорытынды аттестаттауға дайындығы, мамандықты таңдауы анықтаушы факторлар болады. Бұл кезеңде оқыту жоғары оқу орынына түсе алатындай, онда оқуды жалғастыруға және мамандықты игеруге мейілінше жеткілікті болатындай сапалы математикалық білімді қамтамасыз ететіндей болуы керек. Математиканы тереңдетіп оқытудың маңызын сәтті шешу көп жағдайда оқу үрдісіне байланысты. Мұғалімдерге әдістемелік нұсқау мен оқытудың ұйымдастырушылық формасын еркін таңдауына мүмкіндік жасалынады. Дипломдық жұмыста математика пәні бойынша «Теңсіздіктер» тақырыбын қарапайымнан күрделіге өтетіндей кезеңдер бойынша теориялық тақырыптар мен практикалық есептерді шешу жолдары қарастырылған.

Математикада «Теңсіздіктер» тақырыбы маңызды орындардың бірін алады. Мектепте балалар бұл тақырыпты бастауыш сыныптарда оқи бастайды, онда олар теңсіздіктердің қасиеттерімен және оларды қарапайым жағдайларда шешу әдістерімен танысады. Теңсіздіктерді қолданып есептерді шешу математиканың барлық саласында: алгебрада, геометрияда, ықтималдықтар теориясында, математикалық физикада және басқа пәндерде қолданылады. Практикада оқушылар кейбір есептерді стандартты түрде шешуге болмайтындығымен бетпе-бет келеді, сондықтан Коши, Бернулли, Коши-Буняковский, Чебышев, Йенсен теңсіздіктері сияқты тамаша теңсіздіктерді қолдануға болатындығы дипломдық жұмыста есептерді шығару барысында көрсетілген. Атап айтар болсақ, теңсіздіктерді дәлелдеуде, сонымен қатар тригонометриялық теңдеулерді шешуде, функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табуда, сонымен қатар геометриялық есептерде кеңінен қолданылуы көрсетілген. Дипломдық жұмыста қарастырылған теңсіздіктер және олармен байланысты есептер оларды алгебрада да, геометрияда да қолданудың әртүрлі әдістері мен жолдары арқылы көрсетілген. Қарастырылған теңсіздіктер күрделілігі орташа деңгейден күрделіге өту ретімен қарастырылған.

**Пайдаланылған әдебиеттер**

1. Балаян, Э. Н. Лучшие олимпиадные задачи по математике: 7– 11 классы. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2011. –318 с.

2. Балаян, Э. Н. 555 олимпиадных и занимательных задач по математике. 5–11 классы. – Изд. 2-е, доп. и перераб. –Ростов-наДону: Феникс, 2010. – 253 с.

3. Балаян, Э. Н. Сборник задач по математике для подготовки к ЕГЭ и олимпиадам: задачи повышенной сложности: 9–11 классы. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2010. – 412 с.

4. Гомонов, С. А. Замечательные неравенства: способы получения и применения. 10–11 кл.: учебное пособие. – 3-е изд., стереотипное. – М. : Дрофа, 2007. – 152 с.

5. Далингер, В. А. Задачи на наименьшее и наибольшее значения функции и классические неравенства: учебно-методическое пособие. – Омск: Изд-во ОмГПУ, 2009. – 128 с.

6. Далингер, В. А. Классические неравенства и решение задач с их использованием: учебное пособие. Омск: Изд-во «Амфора», 2013. – 130с.

7. Калинин, С. И. Средние величины степенного типа. Неравенства Коши и Ки Фана: учебное пособие по спецкурсу. – Киров: Изд-во ВГГУ, 2002. – 368 с.

8. Седракян Н.М., Авоян А.М. Неравенства. Методы доказательств. – М.: Физматлит, 2002

9. Әбілқасымова А., Кудакова Р. Алгебра және анализ бастамалары. Жоғары оқу орындары жанындағы даярлық бөлімдерінің тыңдаушыларына арналған оқу құралы. - Алматы: Ана тілі, 1991

10. Қаңлыбаев Қ. және т.б. Тригонометриялық функциялар және олардың теңдеулері мен теңсіздіктері.- Алматы: Республикалық баспа кабинеті, 1995

11Ералиев С.Е., Математика 1. Есептер жинағы: Жоғарытехн. оқуорынд. студ. арн. оқулық /.- Алматы, 2012.- 184 б

12.Ковалева Г.И., Конкина Е.В. Функциональный метод решения уравнений и неравенств.- М.:Чистые пруды, 2008 – 32 с.

**Қосымша**

**Өзіндік орындауға арналған тапсырмалар**

:

1.  шартын пайдаланып,  тура екендігіндәлелдеңіздер.

2. Теңсіздікті дәлелдеңіздер  

 3. болса, онда  дәлелдеңіздер.

4.  болса, онда  дәлелдеңіздер

5. Егер  болса, онда  теңсіздігін орынды болатындығын көрсетіңдер.

6. болса,  онда дәлелдеңіздер.

7. Егер болса, онда  теңсіздігін дәлелдеңіздер у.

8.  болса, онда  дәлелдеңіздер.

9. болса, онда дәлелдеңіздер.

10. болса, онда дәлелдеңіздер.

11. болса, онда дәлелдеңіздер.

12. болса, онда дәлелдеңіздер.

 13. Теңдеуді шешіңіздер:

 14. Теңдеуді шешіңіздер:

 15. Теңдеуді шешіңіздер:

 16. Теңдеуді шешіңіздер:

 17. Теңсіздікті дәлелдеңіздер:

 18.Теңсіздікті дәлелдеңіздер: